

2. Differentialgeometrie - Vorlesung

§1) Kurven im \mathbb{R}^3 :

Def. 1.1 Sei $I \subset \mathbb{R}$ eine zusammenhängende Teilmenge. Eine Abb. $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ der Klasse C^k , $k \geq 3$, nennen wir einen „Weg“ oder eine Kurve im \mathbb{R}^3 .

- Falls $\dot{\gamma}(t) \neq 0 \forall t \in I$, so heißt γ regulär
- Falls $|\dot{\gamma}| \equiv 1$ auf I , so heißt er „nach Bogenlänge parametrisiert.“ ($|I| = \text{Länge}(\gamma)$)

Def. 1.2: Sei $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein Weg mit $|\dot{\gamma}| \equiv 1$.

①

Wir definieren die Tangente T an γ in $s \in I$

durch $T(s) := \dot{\gamma}(s)$, die Normale N

" $N(s) := \frac{\ddot{\gamma}(s)}{|\ddot{\gamma}(s)|}$, die Krümmung κ_γ

" $\kappa_\gamma(s) := |\ddot{\gamma}(s)|$, die Binormale B

" $B(s) := (T \times N)(s)$ und die Torsion τ

" $\tau(s) := \langle \dot{B}, N \rangle(s)$.

Bemerkung:

Das Vektorentripel $\{T, N, B\}(s)$ bildet für jedes s eine ON-Basis des \mathbb{R}^3 , auch das (γ) -begleitende „Dreibein“ genannt.

Für die entsprechende Matrix $\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix} \in O(3)$ gelten die

Frenetschen Formeln, Satz 1.1:

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}(s) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}(s) \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}(s), \quad \forall s \in I$$

Bew.:

$$\text{Aus } |B|^2 \equiv 1 \Rightarrow \langle B, B \rangle \equiv 0$$

$$\Rightarrow \exists \alpha(s), \tau(s) \in \mathbb{R} \text{ mit } \dot{B}(s) = \alpha \cdot T(s) + \tau \cdot N(s)$$

$$\Rightarrow \langle \dot{B}, T \rangle(s) = \alpha(s) + 0$$

$$\text{Und aus } \langle B, T \rangle \equiv 0 \Rightarrow \langle \dot{B}, T \rangle = -\langle B, \dot{T} \rangle$$

$$\text{Also } \alpha(s) = -\langle B, \dot{T} \rangle(s) = -\kappa(s) \underbrace{\langle B, N \rangle(s)}_{\equiv 0} = 0$$

$$\Rightarrow \dot{B}(s) = \tau \cdot N(s) \quad \forall s \quad \checkmark$$

$$\text{Sei nun } \dot{N}(s) = \beta_1(s) T(s) + \beta_2(s) N(s) + \beta_3(s) B(s)$$

③

für gewisse $\beta_j(s) \in \mathbb{R}$.

$$\text{Aus } \langle N, T \rangle \equiv 0 \Rightarrow \langle \dot{N}, T \rangle = -\langle N, \dot{T} \rangle$$

$$\Rightarrow \beta_1(s) = \langle \dot{N}, T \rangle(s) = -\langle N, \dot{T} \rangle(s) = -\mathcal{R} \langle N, \dot{N} \rangle(s) \stackrel{= \tau}{=} \tau$$

$$\langle N, N \rangle \equiv 1 \Rightarrow \langle N, \dot{N} \rangle \equiv 0, \text{ also } \beta_2(s) = 0 \checkmark$$

$$\text{Aus } \langle N, B \rangle \equiv 0 \Rightarrow \langle \dot{N}, B \rangle = -\langle N, \dot{B} \rangle = -\tau$$

$$\Rightarrow \beta_3(s) = -\tau(s) \checkmark$$

Und $\dot{T}(s) = \mathcal{R} N(s)$ nach Def. von N und \mathcal{R} . \square

Bem.: a) Die Dreibein-Matrix $\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}(s)$ löst

also das Anfangswertproblem 1. Ordn.

$$\dot{Z}(s) = A(s) \cdot Z(s), \text{ mit } A(s) := \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{R} & 0 \\ -\mathcal{R} & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}(s)$$

$\in \text{Antisym}(3, \mathbb{R})$

Falls A unabh. von s ist, so kann die Lös.

$$\text{explizit durch } Z(s) = \exp(A(s-t_0)) \cdot Z(t_0)$$

(4)

für ein belieb., fixiertes $t_0 \in I$ angegeben werden. Hierbei ist

$$\operatorname{esep}(M) := 1 + M + \frac{1}{2} M^2 + \frac{1}{6} M^3 + \frac{1}{24} M^4 + \dots$$

für jedes $M \in \operatorname{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$ definiert und auch konvergent, da wegen $|M^j| \leq |M|^j$

die reelle Exponentialreihe

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} |M|^j \quad \text{eine konvergente Majorante}$$

für $\operatorname{esep}(M)$ ist.

b) Siehe Aufg. 2: Falls $M = -M^T$, so ist $\operatorname{esep}(M) \in \operatorname{SO}(n)$! Warum?

Sei nun ein C^k -Weg $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, mit $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ $\forall t \in I$, beliebig vorgegeben, der nicht nach seiner Bogenlänge parametrisiert ist.

Wie sollen nun seine Krümmung und Torsion in einem $t \in I = [a, b]$ definiert und berechnet werden?

Antwort: „Umparametrisieren auf Bogenlänge“.

Betrachte dazu $\sigma(t) := \int_a^t |\dot{\alpha}(\tilde{t})| d\tilde{t}$.

Es bildet σ also das Intervall $[a, b]$ surjektiv auf $[0, L]$, $L := \text{Länge}(\alpha)$, ab, und wegen $\dot{\sigma}(t) = |\dot{\alpha}(t)| > 0$ sogar bijektiv!

$\Rightarrow \exists$ Umkehrabb. $\varphi = \sigma^{-1}: [0, L] \xrightarrow{\cong} [a, b]$
 $s \longleftarrow \longrightarrow t = \varphi(s)$
ebenfalls der Klasse C^k .

Bilde nun $\gamma := \alpha \circ \varphi: [0, L] \xrightarrow{C^k} \mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned} \text{Es gilt: } |\dot{\gamma}(s)| &= |\dot{\alpha}(\varphi(s)) \cdot \underbrace{\dot{\varphi}(s)}| \equiv 1 \quad \forall s \in [0, L] \\ &= \frac{1}{\dot{\sigma}(\varphi(s))} = \frac{1}{|\dot{\alpha}(\varphi(s))|} \checkmark \end{aligned}$$

\rightarrow Definiere: $\mathcal{K}_\alpha(t) := \mathcal{K}_\gamma(\sigma(t))$ und
die Torsion $\tau_\alpha(t) := \tau_\gamma(\sigma(t)) \quad \forall t \in [a, b]$

(6)

Satz 1.2:

Für einen beliebigen, regulären C^k -Weg
 $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $k \geq 3$, gelten die Formeln:

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|}{|\dot{\alpha}|^3}(t), \text{ und falls } \kappa_\alpha(t) \neq 0,$$

$$\tau_\alpha(t) = - \frac{\det(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ddot{\alpha}')}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|^2}(t).$$

Bew.: Ist Aufgabe 1 des 1. Übungsblattes \square

Diese Formeln sind äußerst nützlich, da
sich zu einem hinreich. kompliz. Weg α , das
 $\sigma(t) = \int_a^t |\dot{\alpha}(\bar{t})| d\bar{t}$ und erst recht nicht das
 $\varphi(s) = \sigma^{-1}(s)$ explizit bestimmen lassen.

Bsp.: $\alpha(t) = (t, t^2) \Rightarrow |\dot{\alpha}| = (1 + 4t^2)^{1/2}$

(7)

$$\Rightarrow \sigma(t) = \int_0^t (1+4\tilde{t}^2)^{1/2} d\tilde{t}, \quad \tilde{t} = \frac{1}{2} \sinh u$$

$\arcsinh(2t)$

$$= \int_0^{\arcsinh(2t)} (1+\sinh^2 u)^{1/2} \frac{1}{2} \cosh u du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\arcsinh(2t)} \cosh^2 u du$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{u^*} \frac{1}{4} (e^{2u} + e^{-2u} + 2) du$$

$$= \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} (e^{2u} - e^{-2u}) + 2u \right) \Big|_0^{u^*}$$

$$= \frac{1}{8} (\sinh(2 \arcsinh(2t)) + 2 \arcsinh(2t))$$

ist bereits ziemlich kompliziert und erst
recht die Bestimmung von $\rho = \sigma^{-1}$!

Andererseits: $\ddot{L}(t) = (0, 2)$, $\ddot{L} \equiv (0, 0)$

$$\Rightarrow \mathcal{K}_2(t) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right|}{(1+4t^2)^{3/2}} = \frac{1}{(1+4t^2)^{3/2}} \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$$

und $\tau_2(t) \equiv 0$

Korollar 1.2 (aus Satz 1.2)

Sei $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein beliebig. C^3 -Weg, so gilt:

$$K_\alpha(t) = \frac{\dot{\alpha}^1 \cdot \ddot{\alpha}^2 - \dot{\alpha}^2 \cdot \ddot{\alpha}^1}{|\dot{\alpha}|^3}(t) \quad (*)$$

Ist speziell $\alpha^1(t) = t$, also $\alpha(t) = (t, \beta(t))$,

$$\text{dann ist } K_\alpha(t) = \frac{\ddot{\beta}(t)}{(1 + \dot{\beta}(t)^2)^{3/2}}$$

Und falls $\alpha(t) = (r(t) \cos t, r(t) \sin t)$,

$$\text{so hat man } K_\alpha(t) = \frac{2(\dot{r})^2 - (r\ddot{r})'(t) + r(t)^2}{(r^2 + \dot{r}^2)^{3/2}}(t)$$

Bew.: Folgt sofort aus Satz 1.2 (Übungsblatt) \square

Bem.: Man verzichtet in (*) auf $|\cdot|$, um der Krümmung im planaren Fall ein Vorzeichen

zu geben. Man kann zeigen:

Satz 1.3 (Eiliniem)

Sei $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre Kurve mit $\alpha(a) = \alpha(b)$ und ohne Selbstschnitte, also injektiv auf (a, b) . Gilt nun

$K_\alpha(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$, so ist das von α berandete Gebiet Interior(α) konvex.

Bew.: 2. Übungsblatt

Weitere Tips zum 1. Übungsblatt:

Aufg. 4) $J(w) = -\frac{\beta}{2w^2}$, nicht $\Phi(w) = -\frac{\beta}{2w^2}$!

3 b) 1. Zwischenschritt: $N = \frac{2}{|\Phi|^2} \operatorname{Im} \begin{pmatrix} \Phi_2 & \Phi_2 \\ \Phi_3 & \Phi_1 \\ \Phi_1 & \Phi_2 \end{pmatrix}$

2. Schritt: $N = \frac{1}{1+|w|^2} \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \\ |w|^2 - 1 \end{pmatrix}$

Aufg. 2 b) Man beachte richtige Wahl von $\begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}(0)$, ausgehend von (2a)! (10)

3. Differentialgeometrie - Vorlesung

Satz 1.3 (Hauptsatz der Kurventheorie)

Seien zwei beliebige Funktionen κ, τ der Klasse C^1 auf einem Intervall $I = [a, b]$ vorgegeben, so existiert eine reguläre, nach Bogenlänge parametrisierte Kurve $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^3$, sodass $\kappa_\alpha \equiv \kappa$ und $\tau_\alpha \equiv \tau$. Sind $\alpha, \tilde{\alpha}$ zwei solcher Kurven, so existiert eine Drehung $R \in SO(3)$ und ein $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\tilde{\alpha} = R(\alpha) + v$ auf I .

Zum Beweis benötigen wir den „konstruktiven“ Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf:

Satz 1.4 : (Picard-Lindelöf)

Sei $F : I \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein zeitabhängiges, stetiges Vektorfeld, welches auf einem Ball $B_r(\mathcal{X}_0) \subset \mathcal{D}$ beschränkt und Lipschitz-stetig ist, also mit $|F(t, x)| \leq m$ und $|F(t, x) - F(t, y)| \leq L|x - y|, \forall t \in I, \forall x, y \in \mathcal{D}$

Dann existiert genau eine Lösungskurve

$\mathcal{X} \in C^1([-\delta, \delta], \mathbb{R}^n)$ von

$$\dot{\mathcal{X}}(t) = F(t, \mathcal{X}(t)), \quad t \in [-\delta, \delta]$$

mit $\mathcal{X}(t) \in B_r(\mathcal{X}_0), \mathcal{X}(0) = \mathcal{X}_0,$

wobei $\delta := \min\left(\frac{r}{m}, a\right)$ ist.

Beweis der Eindeutigkeit:

Seien zwei solche Lösungen \mathcal{X}, γ existent.
 \Rightarrow Bilde $v(t) := |\mathcal{X} - \gamma|^2(t)$. Es gelten:

$$V(0) = 0 \text{ und } \dot{V}(t) = 2 \cdot \langle \tilde{x} - \gamma(t), (\dot{\tilde{x}} - \dot{\gamma}(t)) \rangle$$

$$= 2 \cdot \langle \tilde{x} - \gamma, F(t, \tilde{x}) - F(t, \gamma) \rangle$$

$$\Rightarrow |\dot{V}(t)| \leq 2 \|\tilde{x} - \gamma\| L \cdot \|\tilde{x} - \gamma\| = 2L V(t), \quad t \in [0, s]$$

„Gronwall-Trick“:

Betrachte auf $[0, s]$ die Lösung

$$w(t) := e^{\text{sep}(-2Lt)} \text{ von } \dot{w} = -2Lw, \quad w(0) = 1,$$

und bilde $z(t) := V(t)w(t)$.

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = \dot{V}(t)w(t) + V(t)\dot{w}(t)$$

$$\leq 2L V(t)w(t) + V(t)(-2Lw(t)) = 0$$

$\Rightarrow z$ fällt auf $[0, s]$ und insbesondere:

$$V(t)w(t) \leq z(0) = V(0), \text{ also } V(t) \leq V(0)e^{2Lt}$$

$$\Leftrightarrow \|\tilde{x} - \gamma\|(t) \leq \sqrt{V(0)w^{-1}(t)} = \|\tilde{x} - \gamma\|(0) e^{\text{sep}(Lt)}$$

③ für $t \in [0, s]$

und analog folgt aus $\dot{v} \geq -2Lv$ auf $[s, 0]$
mittels der Hilfsfunktionen

$$\tilde{w}(t) := \exp(2Lt) \text{ und } \tilde{z}(t) = \tilde{w}(t)|v(t)|$$

$$|\tilde{x} - \gamma|(t) \leq |\tilde{x} - \gamma|(0) \exp(Lt) \text{ für } t \in [-s, 0]$$

Da wir $\tilde{x}(0) = \gamma(0)$ wissen, folgt also
insbes.: $\tilde{x} \equiv \gamma$ auf $[-s, s]$. \square

In dem für uns interessanten Spezialfall $F(t, x) := A(t) \cdot x$, $A \in C^1(I, \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}))$

gilt sogar

Satz 1.5 (Globale Lösung)

Sei $A \in C^1(\underbrace{[-a, a]}_I, \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}))$, so exist.
genau eine Lösung $\tilde{x} \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$ von

④

(AWP) $\dot{X}(t) = A(t)X(t)$, $X(0) = X_0$, auf ganz I.

Bew:

Sei $S^* := \sup \{ s \in [\delta, a] \mid \exists! \text{ Lösung } X \text{ von AWP auf } [-\delta, s] \}$

Wir nehmen an: $S^* < a$.

Wie verhält sich $X(t)$ für $t \rightarrow S^*$?

Für $v(t) := |X(t)|^2$ erhalten wir:

$$\dot{v}(t) = 2 \langle X(t), \dot{X}(t) \rangle = 2 \langle X, A(t)X \rangle$$

$\underbrace{\quad}_{|A| \leq L} \forall t \in [-a, a]$

$$\Rightarrow |\dot{v}(t)| \leq 2L v(t) \quad \forall t \in [-\delta, S^*]$$

Wie oben folgt hieraus: (Gronwall)

$$v(t) \leq v(0) \exp(2Lt)$$

$$\Leftrightarrow |X(t)| \leq |X_0| \exp(Lt) \quad \forall t \in [0, S^*]$$

$$\Rightarrow |X(t_2) - X(t_1)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \dot{X}(s) ds \right| \leq$$

⑤

$$\leq \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{|A(s)|}_{\leq L} |\underline{X}(s)| ds \leq L |\underline{X}_0| \frac{1}{L} \exp(Lt) \Big|_{t_1}^{t_2}$$

$$= |\underline{X}_0| (\exp(Lt_2) - \exp(Lt_1))$$

für beliebige $0 \leq t_1 \leq t_2 < S^*$

\Rightarrow Für eine beliebige Folge $t_k \rightarrow S^*$ ist also $\{\underline{X}(t_k)\}$ eine Cauchy-Folge in \mathbb{R}^n

$\Rightarrow \exists p^* \in \mathbb{R}^n$ mit $\underline{X}(t_k) \rightarrow p^* =: \underline{X}(s^*)$

$$\begin{array}{ccc} \Rightarrow & A(t)\underline{X}(t) = \dot{\underline{X}}(t) & \\ & \downarrow t \rightarrow s^* & \downarrow \\ & A(s^*)\underline{X}(s^*) = \dot{\underline{X}}(s^*) & \end{array}$$

Es läßt sich also \underline{X} auf $[-s_1, \underline{s}]$ als C^1 -

Lösung von AWP fortsetzen!

Und sogar noch darüber hinaus, denn:

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf hat

das AWP $\dot{Y}(t) = A(t+s^*) Y(t)$

$$Y(0) = X(s^*)$$

auf $[-\tilde{\delta}, \tilde{\delta}]$ eine eindeut. Lösung Y , mit

$$\tilde{\delta} := \frac{1}{L(|X_0| \exp(Ls^*) + 1)}.$$

$\Rightarrow \tilde{X}(t) := Y(t-s^*)$ löst

$$\frac{d}{dt} \tilde{X}(t) = A(t) \cdot \tilde{X}(t), \quad \tilde{X}(s^*) = Y(0) = X(s)$$

(AS)

für $t \in [s^* - \tilde{\delta}, s^* + \tilde{\delta}]$

Bilde wieder $V(t) := |X(t) - \tilde{X}(t)|^2$

für $t \in [s^* - \tilde{\delta}, s^*]$

$$\Rightarrow \dot{V}(t) = 2 \langle X(t) - \tilde{X}(t), A(t) \cdot (X(t) - \tilde{X}(t)) \rangle$$

$$\Rightarrow |\dot{V}| \leq 2LV \quad \text{auf } [s^* - \tilde{\delta}, s^*]$$

Mit dem Gronwall-Trick

$$\Rightarrow V(t) \leq V(s^*) \exp(-2L(t-s^*)), \quad \forall t \in [s^* - \tilde{\delta}, s^*]$$

⑦

Und da $v(s^*) = 0 \Rightarrow \bar{x} \equiv \tilde{x}$ auf $[s^* - \tilde{\delta}, s^*]$

Wir konnten also die eindeutige Kurzzeitlösung \tilde{x} vom AWP (AS) an unsere maximale Lösung \bar{x} entlang $[s^* - \tilde{\delta}, s^*]$ "anschweißen" und somit \bar{x} als C^1 -Lösung

von $\dot{\bar{x}}(t) = A(t)\bar{x}(t)$ in eindeut. Weise auf $[-s, s^* + \tilde{\delta}]$ fortsetzen!

Widerspruch zur Defini. von s^* !

$\Rightarrow s^* = a$, d.h. die Lösung \bar{x} unseres AWP muß bis zum maximalen Zeitpunkt a , also auf $[-s, a]$, existieren!

Analog: \bar{x} muß seit $-a$, also auf ganz $I = [-a, a]$ existieren! \square

Durch „spaltenweise“ Anwendung:

Korollar 1.3

Sei $A \in C^1(I, \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}))$, so besitzt das matriseswertige AWP

$$\dot{Z}(t) = A(t)Z(t), \quad Z(0) = Z_0 \in \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R})$$

genau eine Lösungsmatrixkurve $Z \in C(I, \text{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}))$

Bemerkung:

Falls man $A(t_1) \cdot A(t_2) = A(t_2) \cdot A(t_1)$ für beliebige Zeitpunkte $t_1, t_2 \in I$ weiß, so

ist $Z(t) = \exp\left(\int_0^t A(\tilde{t}) d\tilde{t}\right) Z_0$, also

Z explizit berechenbar!

Dies gilt nicht einmal in unserem Spezial-

$$\text{fall } A(t) = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(t) & 0 \\ -\kappa(t) & 0 & -\tau(t) \\ 0 & \tau(t) & 0 \end{pmatrix} : A(t_1)A(t_2) = (A(t_2)A(t_1))^T !$$

Beweis von Satz 1.3 :

$$\text{Wir betrachten } A(t) := \begin{pmatrix} 0 & \mathcal{K} & 0 \\ -\mathcal{K} & 0 & -\mathcal{J} \\ 0 & \mathcal{J} & 0 \end{pmatrix}(t)$$

Zu den gegebenen \mathcal{K}, \mathcal{J} , also $A \in C^1(I, \text{Mat}_{3,3}(\mathbb{R}))$

Aus Korollar 1.3 wissen wir: Zu $Z_0 \in SO(3)$

$\exists!$ Lösung $Z \in C^1(I, \text{Mat}_{3,3}(\mathbb{R}))$ von

$$\dot{Z}(t) = A(t)Z(t) \text{ mit } Z(0) = Z_0.$$

bleibt $Z(t) \in SO(3) \forall t$?

$$\frac{d}{dt} (Z^T(t)Z(t)) = \dot{Z}^T(t)Z(t) + Z^T(t)\dot{Z}(t)$$

$$= Z^T(t) \underbrace{A(t)^T}_{=-A(t)} Z(t) + Z^T(t)A(t)Z(t) = 0$$

$$\Rightarrow (Z^T Z)(t) = \text{const.} = Z_0^T Z_0 = 1 \quad \forall t \in I$$

$$\Rightarrow \det Z(t) = \pm 1 \quad \Rightarrow \exists Z(t)^{-1} \text{ und damit}$$

$$Z(t)Z^T(t) = 1 \quad \forall t \in I$$

und mit $\det Z(0) = 1 \Rightarrow \det Z(t) = 1$ " "

$$\Rightarrow Z(t) \in SO(3) \quad \forall t \in I \quad \checkmark$$

Wir definieren nun:

$$\alpha(s) := \int_{-a}^s Z_1(t) dt, \quad s \in I, \quad Z(t) = \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \end{pmatrix}(t)$$

Dieser Weg α hat alle gewünschten Eigensch.:

$$1.) \quad |\dot{\alpha}(s)| = |Z_1(s)| = 1 \quad \forall s \in I$$

$$2.) \quad N_\alpha(s) = \frac{\ddot{\alpha}(s)}{|\ddot{\alpha}(s)|} = \frac{1}{K_\alpha(s)} \dot{Z}_1(s)$$

$$\stackrel{\text{(AWP)}}{=} \frac{K(s)}{K_\alpha(s)} Z_2(s),$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1} = \frac{K(s)}{K_\alpha(s)} \cdot 1 \quad \checkmark, \quad \text{da } Z(s) \in SO(3)$$

α hat also die vorgegebene Krümmung $K(s)$

$$\text{und } N_\alpha(s) = Z_2(s)$$

$$3.) \quad B_\alpha(s) = (T_\alpha \times N_\alpha)(s) = Z_1(s) \times Z_2(s)$$

$$Z(s) \in SO(3) \Rightarrow Z_3(s) \quad \textcircled{17} \quad \forall s \in I \quad \checkmark$$

$$\Rightarrow \tau_2(s) = \langle \dot{B}_2(s), N_2(s) \rangle = \langle \dot{Z}_3(s), Z_2(s) \rangle$$

$$(A \overline{WP}) \quad J(s) \underbrace{\langle Z_2(s), Z_2(s) \rangle}_{=1} = J(s) \quad \forall s \in I$$

Angenommen, $\tilde{\alpha} : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist eine weitere
mit $|\dot{\tilde{\alpha}}| \equiv 1$ parametr. Kurve, welche
 $\tau_2(s) = J(s)$ und $\kappa_{\tilde{\alpha}}(s) = \kappa(s) \quad \forall s \in [-a, a]$ löst.

\Rightarrow Das Dreibein \tilde{Z} von $\tilde{\alpha}$ löst somit

$$\text{ebenfalls} \quad \dot{\tilde{Z}}(s) = A(s) \tilde{Z}(s) \quad (A \overline{WP})$$

aber nun $\tilde{Z}(0) = \tilde{Z}_0 \neq Z_0$ aus $SO(3)$.

Immerhin $\exists R \in SO(3)$ mit $\tilde{Z}_0 = Z_0 \cdot R^T$

$\Rightarrow Z(s) \cdot R^T$ löst ebenfalls $(A \overline{WP})$ und

$$\text{auch} \quad Z(0) R^T = Z_0 R^T = \tilde{Z}_0.$$

$$\xrightarrow{\text{Eindeut.keit}} \quad \tilde{Z}(s) = Z(s) R^T \quad \forall s \in [-a, a]$$

Sei \tilde{Z}^1 die erste Zeile von \tilde{Z}

$$\Rightarrow \tilde{L}(s) - \tilde{L}(-a) = \int_{-a}^s \tilde{Z}'(t) dt = \int_{-a}^s Z'(t) R^T dt$$

$$= R \int_{-a}^s \dot{L}(t) dt = R (L(s) - L(-a))$$

$$\Rightarrow \tilde{L}(s) = \underbrace{(\tilde{L}(-a) - R L(-a))}_{=: v \in \mathbb{R}^3} + R L(s) \quad \forall s \in [-a, a]$$

□

4. Differentialgeometrie-Vorlesung

§2) Satz über implizite Funktionen

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+l}$ offen und $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^l)$, $k, l \geq 1$

Def. 2.1 a) Wir nennen einen Punkt $z_0 \in \Omega$ regulär

(für f), falls $Df(z_0)$ maximalen

Rang (= l) hat.

b) Ein Punkt $c \in \mathbb{R}^l$ heißt ein regulärer

Wert einer Funktion $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^l)$,

falls $f^{-1}(c)$ nur aus regulären

Punkten besteht, also falls $\text{Rang } Df(z) = l$

$\forall z \in f^{-1}(c)$ gilt.

Satz über implizite Funktionen (2.1)

Sei $z_0 \in \mathcal{A}$ regulärer Punkt von $f \in C^k(\mathcal{A}, \mathbb{R}^l)$.

Dann gibt es Koordinaten $\underbrace{(x^1, \dots, x^n)}_{=x}, \underbrace{(y^1, \dots, y^l)}_{=y}$ für $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$, sodass $z_0 = (x_0, y_0)$ und

$$D_y f(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial y^1} & \frac{\partial f^1}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial f^1}{\partial y^l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^l}{\partial y^1} & \frac{\partial f^l}{\partial y^2} & \dots & \frac{\partial f^l}{\partial y^l} \end{pmatrix} (z_0)$$

invertierbar ist.

Desweiteren gibt es eine Umgebung U von x_0 in \mathbb{R}^n , eine Funktion $h \in C^k(U, \mathbb{R}^l)$

und eine Umgebung $B_r^{n+l}(z_0)$ in \mathbb{R}^{n+l} , sodass

$$\{z \in B_r^{n+l}(z_0) \mid f(z) = f(z_0)\} = \{(x, h(x)) \mid x \in U\} \\ \textcircled{2} \quad =: \text{graph}(h)$$

Beispiele:

a) Betrachte die Ellipse $(a, b, c > 1)$

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1}_{=: f(x, y, z)} = 0 \right\}$$

$n=2, l=1$

$$\nabla f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2} \right)$$

$$\Rightarrow \nabla f \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \left(0, 0, \frac{2}{c} \right)$$

$\underbrace{\quad}_{=: z_0}$

Also ist $z_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ regulär und $\frac{\partial f}{\partial z} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow \exists r, \varepsilon > 0$, sodaß sich $E \cap B_r^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ mittels

Satz 2.1

einer C^∞ -Funktion $h: \underbrace{B_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\subset (x, y)\text{-Ebene}} \rightarrow \mathbb{R} = z\text{-Achse}$

als Graph $(h) = \left\{ ((x, y), h(x, y)) \mid (x, y) \in B_\varepsilon^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
darstellen läßt.

b) Nun schneiden wir noch $E \cap B_r^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ mit der (y, z) -Ebene, d. h. wir betrachten

$$P := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \mid f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = 0 \text{ und } x = 0 \right\}$$

also $F(x, y, z) = 0$

mit $F(x, y, z) := \begin{pmatrix} f(x, y, z) \\ x \end{pmatrix} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

also $n=1$ und $l=2$!

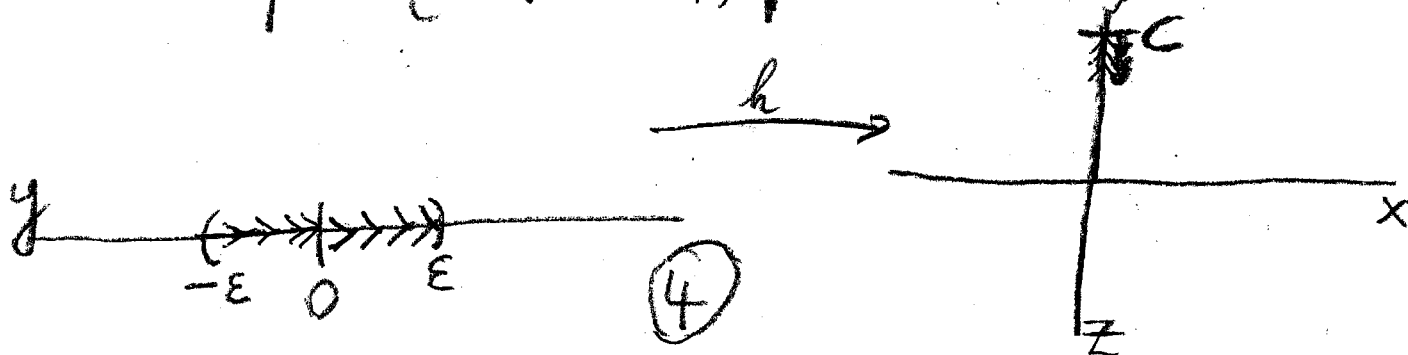
Berechne $DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 \frac{x}{a^2} & 2 \frac{y}{b^2} & 2 \frac{z}{c^2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

\rightarrow Nimm die " $\frac{\partial}{\partial x}$ - und $\frac{\partial}{\partial z}$ -Spalte" heraus, da

$$\frac{\partial F}{\partial (x, z)} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{c} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ist invertierbar!}$$

\Rightarrow Satz 2.1 \exists Abb. $h: (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow{C^\infty} \mathbb{R}^2$
 y -Achse (x, z) -Ebene

sodass $\left\{ (y, h(y)) \mid y \in (-\varepsilon, \varepsilon) \right\} = P$



Interpretation:

Zu a) Wir wollen ein möglichst scharfes
Photo von der Landschaft $B_r \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right) \cap E$
schiessen!

Wir sehen $\frac{d}{dt} \overbrace{f(\alpha(t))}^{\equiv 0} = \langle \nabla f(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t) \rangle$
 $\equiv 0$ falls $\alpha: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow E = f^{-1}(0)$

ein Weg in $f^{-1}(0)$ mit $\alpha(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ ist

$\Rightarrow \nabla f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right)$ steht senkrecht auf E in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$

gibt also die Richtung derjenigen Geraden
an, die E in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ optimal durchsticht."

In diesem Fall ist dies die z-Achse, da

$$\nabla f \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{c} \end{pmatrix} \text{ ist.}$$

\Rightarrow Idee: wir scannen $B_r \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} \right) \cap E$ mittels

Strahlen, die parallel zur z -Achse verlaufen und $E \cap B_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ optimal durchstoßen und

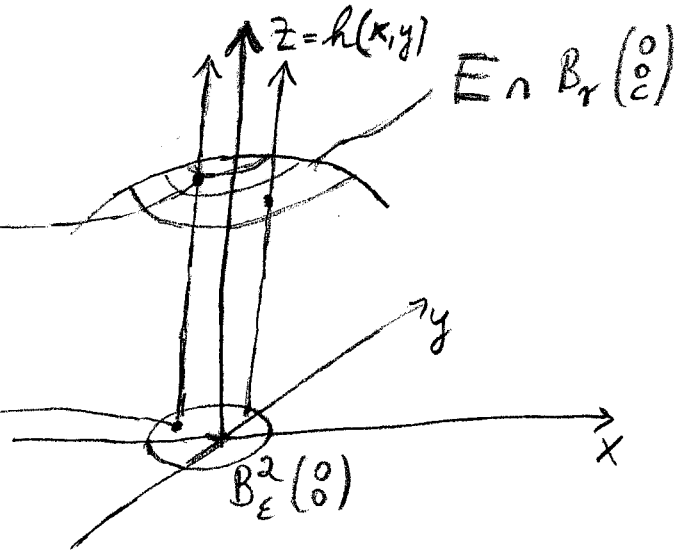
definieren: $(x, y) \mapsto$ Höhe des „Durchstoßpunktes“
 $B_E^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $=: h(x, y) \in z$ -Achse

Projektion von $E \cap B_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ auf (x, y) -Ebene

$$\Leftrightarrow E \cap B_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \left\{ ((x, y), h(x, y)) \mid (x, y) \in B_E^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$(x, y, h(x, y))$

„
 Durchstoßpunkt des Strahles,
 der von $(x, y, 0)$ nach oben
 ausgesandt wird.“



zu b) Wir wollen den Weg P in $E \cap B_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$
 „optimal scannen“. Hier ist P gleich
 $F^{-1}(0) \cap B_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ für ein $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, sodaß

$$DF \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{0 \quad 0 \quad \frac{2}{c}} \\ \boxed{1 \quad 0 \quad 0} \end{pmatrix} \text{ bereits zwei}$$

Vektoren angibt, die „auf P in $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ senkrecht stehen, also die von diesen aufgespannte Ebene $\left\{ a \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{c} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\} = (x, z)$ -Ebene.

\leadsto Diese Ebene „durchstößt P optimal“.

\Rightarrow Idee: wir scannen P mittels Ebenen,

die parallel zur (x, z) -Ebene auf der y -Achse entlangfahren und definieren:

y $\xrightarrow{\quad}$ (x, z) -Koordinaten des
 $\frac{y}{x}$ „Durchstoßpunktes“ $h(y)$
 $(-\varepsilon, \varepsilon) \subset y$ -Achse
 \parallel

Projektion von $P \cap B_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}$ auf die y -Achse

$$\Leftrightarrow P \cap B_r \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = \left\{ (y, h(y)) \mid y \in (-\varepsilon, \varepsilon) \right\}$$

⇒ Definition 2.2: (n -dim. Hyperflächen im \mathbb{R}^{n+l})

Wir nennen eine Teilmenge $S \subset \mathbb{R}^{n+l}$ eine reguläre C^k -Hyperfläche der Dimension n , falls es zu jedem Punkt $z_0 \in S$ eine Umgebung $B_r^{n+l}(z_0)$ und eine Funktion $F \in C^k(B_r^{n+l}(z_0), \mathbb{R}^l)$ gibt, sodass $S \cap B_r^{n+l}(z_0) = F^{-1}(0)$ und $0 \in \mathbb{R}^l$ ein regulärer Wert von F ist, also sodass $\text{Rang } DF(z) = l \quad \forall z \in S \cap B_r^{n+l}(z_0)$ gilt.

Korollar 2.1 aus Satz 2.1

Sei S eine regul. C^k -Hyperfläche der Dim. n im \mathbb{R}^{n+l} . So gibt es zu jedem $z_0 \in S$ eine Umgeb. $B_r^{n+l}(z_0)$ und dazu eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ und ein $h \in C^k(U, \mathbb{R}^l)$

⑧

$$\text{sodass } S \cap B_r^{n+l}(z_0) = \{(x, h(x)) \mid x \in U\} \\ = \text{graph}(h)$$

→ Definition 2.3 :

Sei S eine reg. n -Hyperfl. der Kl. C^k im \mathbb{R}^{n+l} .

So nennen wir eine (nach Kor. 2.1 existente)

Familie $\{U_i, \Phi_i \in C^k(U_i, \mathbb{R}^{n+l})\}_{i \in I \subset \mathbb{N}}$ mit

$$1.) \Phi_i(x) = (x, h_i(x)), \quad h_i \in C^k(U_i, \mathbb{R}^e),$$

$$2.) \text{Bild}(\Phi_i) = \text{graph}(h_i) \subset S \quad \forall i \in I$$

$$3.) S \subset \bigcup_{i \in I} \text{Bild } \Phi_i$$

ein „Kartensystem“ oder „Atlas“ von S .

Weitere Beispiele :

a) Die $O(3)$ ist eine C^∞ -Hyperfläche im \mathbb{R}^9 der Dimension ? Aufg. 10(b).

⑨

Hinweis: $O(3) = F^{-1}(0)$, für ein $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,
welches aus $AA^T = 1 \quad \forall A \in O(3)$ konstr. wird

b) Zylinder $Z := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$
 $= F^{-1}(0)$

mit $F(x, y, z) := x^2 + y^2 - 1 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$
 $n=2, l=1$

$$\Rightarrow \nabla F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Tatsächlich: } \left| \nabla F \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right| = 2 \left| \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right| > 0$$

falls $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in Z$

$\Rightarrow Z$ ist 2-dim. C^∞ -Hyperfl. im \mathbb{R}^3 .

c) Hyperboloide und Kegel im \mathbb{R}^3 :

$$H_c := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = c\}, \quad n=2, l=1$$
$$= f^{-1}(0) \text{ für } f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - z^2 - c, c \in \mathbb{R}$$

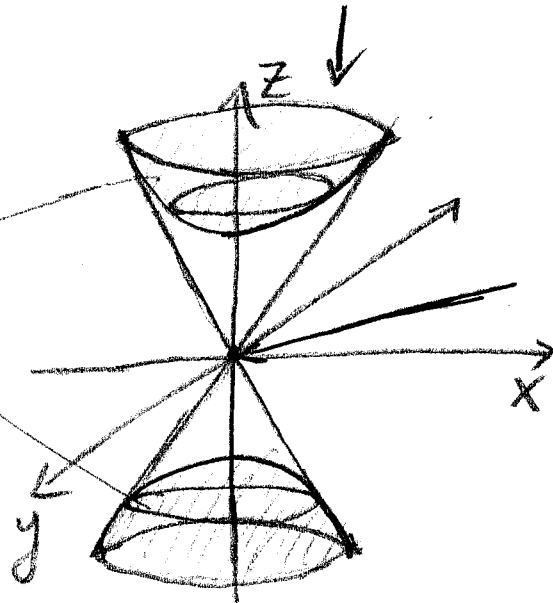
$$\nabla f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ -2z \end{pmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \neq 0.$$

Also, falls $c \neq 0 \Rightarrow H_c$ ist regul. C^∞ -Fl.
der Dimension 2 im \mathbb{R}^3 ,

denn dann liegt jeder Punkt von H_c in
 $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, ist also regul. Pkt. von f .

Falls $c = 0 \Rightarrow 0 \in H_0 = \text{Kegel}$ ist singular
für f !

$H_c, c < 0$
"zweischaliges
Hyperboloid"



Singularität des
Kegels

d) Cassinische Kurven im \mathbb{R}^2 :

Fixiere $P_1 := (-1, 0)$, $P_2 := (0, 1)$ und betr.

$$f_c(x, y) := \text{dist}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P_1\right)^2 \text{dist}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, P_2\right)^2 - c^4 \\ = ((1+x)^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2) - c^4, c > 0$$

$$\Rightarrow M_c := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f_c(x, y) = 0 \right\}$$

sind für $c \neq 1$ 1-dim. regul. C^∞ -Hyperfl.
im \mathbb{R}^2 , die sogenannten Cassinischen Kurven,
aber für $c=1$ ist 0 eine Singularität
von M_1 , da sich M_1 in 0 durchschneidet.

$$f_c(x, y) = (1+2x+x^2+y^2)(1-2x+x^2+y^2) - c^4 \\ = (-c^4 + 1) \cancel{-2x} + \cancel{x^2} + y^2 + \cancel{2x} \cancel{-4x^2} + \cancel{2x^3} + \cancel{2xy^2} \\ + \cancel{x^2} \cancel{-2x^3} + x^4 + x^2 y^2 + y^2 \cancel{-2xy^2} + y^2 \cancel{x^2} + y^4 \\ = (1-c^4) - 2x^2 + 2y^2 + 2x^2 y^2 + x^4 + y^4$$

$$\Rightarrow \nabla f_c(x, y) = \begin{pmatrix} -4x + 4xy^2 + 4x^3 \\ 4y + 4x^2y + 4y^3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} (y^2 - 1)x + x^3 \\ (1 + x^2)y + y^3 \end{pmatrix}$$

für belieb. $c > 0$

$$\nabla f_1(x, y) = 0 \text{ und } f_1\left(\frac{x}{y}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

