15.5.09

5. Vorlesung: Differentialgeometrie

Beweis von Satz 2.1: OBDA: $\Omega = \mathbb{R}^{n+l}$, $f(z_0)=0$.

Sei $F : \underset{(x}{\mathbb{R}^n} \times \underset{y)}{\mathbb{R}^l} \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$ definiert durch

$$F(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_l) := (x_1, \dots, x_n, f_1(x,y), \dots, f_l(x,y))$$

$$\Rightarrow DF(x,y) = \begin{array}{c} \left.\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial y_l} \\ \vdots & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_l}{\partial x_1} & \cdots & & \frac{\partial f_l}{\partial x_n} & \frac{\partial f_l}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial f_l}{\partial y_l} \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \}\, n \\ \\ \\ \\ \}\, l \\ \\ \end{matrix}\right. \\ \underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxxxx}}_{n}\underbrace{\hphantom{xxxxxxxxxx}}_{l} \end{array}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{1}_n & 0 \\ D_x f(x,y) & D_y f(x,y) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det DF(x,y) = \det D_y f(x,y) \quad , \forall (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$$

und insbesondere: $\det DF(x_0, y_0) \neq 0$.

Aus dem Umkehrsatz folgt die Existenz eines $r > 0$, sodaß $F : B_r^{n+l}(x_0, y_0) \xrightarrow{\cong} F(B_r^{n+l}(x_0, y_0))$ ein C^k-Diffeomorphismus ist.

Sei $p_x : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ die Projektion auf $\mathbb{R}^n$.
$$(x, y) \longmapsto x$$

Da $F(x, y) = (x, f(x, y))$, also

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{F}{\longmapsto} \begin{pmatrix} p_x(x,y) \\ f(x,y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^l$$ erhalten

wir

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(c_1) \cap B_r^{n+l}(x_0, y_0) \arrow[r, "F", "\cong"'] \arrow[d, hook] & p_x\left(f^{-1}(c_1) \cap B_r^{n+l}(x_0, y_0)\right) \times \{c_1\} \arrow[d, hook] \\
B_r^{n+l}(x_0, y_0) = \coprod_{c \in \mathbb{R}^l} f^{-1}(c) \cap B_r^{n+l}(x_0, y_0) \arrow[r, "\cong", "F"'] & \coprod_{c \in \mathbb{R}^l} U_c \times \{c\} \\
f^{-1}(c_2) \cap B_r^{n+l}(x_0, y_0) \arrow[r, "F", "\cong"'] \arrow[u, hook] & p_x\left(f^{-1}(c_2) \cap B_r^{n+l}(x_0, y_0)\right) \times \{c_2\} \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

Hierbei sind $U_c := p_x\left(f^{-1}(c) \cap B_r^{n+l}(x_0, y_0)\right) \subset B_r^n(x_0)$ offene Mengen, da $\coprod_{c \in \mathbb{R}^l} U_c \times \{c\} = F\left(B_r^{n+l}(x_0, y_0)\right)$

offen in $\mathbb{R}^{n+l}$ ist. Desweiteren erhalten wir aus dem obigen Diagramm (also aus der universellen Eigenschaft der direkten Summe), daß die Einschränkungen $F|_{f^{-1}(c)\cap B_r^{n+l}(x_0,y_0)}$ Homöomorphismen von $f^{-1}(c)\cap B_r^{n+l}(x_0,y_0)$ auf $U_c\times\{c\}$, $\forall c\in\mathbb{R}^l$, sind, da F ein Diffeomorphismus ist.

Sei nun $\underline{\Phi} := F^{-1}$ die C^k-Inverse von F.

Da $F(x,y) = (x, f(x,y))$ ist, muß $\underline{\Phi}$ die Form

$$\Phi(x,y) := (x, \Phi_{n+1}(x,y), \dots, \Phi_{n+l}(x,y))$$ haben.

Insbesondere sehen wir also:

$$\Phi|_{U_0\times\{0\}} : U_0\times\{0\} \xrightarrow{\cong} f^{-1}(0)\cap B_r^{n+l}(x_0,y_0)$$
$$(x,0) \longmapsto (x, \Phi_{n+1}(x,0), \dots, \Phi_{n+l}(x,0))$$

Definieren wir also komponentenweise:

$$h(x) = (h_1(x), \ldots, h_\ell(x)) := (\Phi_{n+1}(x,0), \ldots, \Phi_{n+\ell}(x,0)),\ x \in \mathcal{U}_0$$

so ist tatsächlich $h \in C^k(\mathcal{U}_0, \mathbb{R}^\ell)$ und

$$f^{-1}(0) \cap B_r^{n+\ell}(x_0, y_0) = \{(x, h(x)) \mid x \in \mathcal{U}_0\} \equiv \mathrm{graph}(h)$$

über einer offenen Umgeb. $\mathcal{U} := \mathcal{U}_0$ des Punktes $x_0 = P_x(z_0)$ in $B_r^n(x_0)$. $\square$

<u>Anschauliche Interpretation:</u>

Wir zerlegten $B_r^{n+\ell}(x_0, y_0)$ in disjunkte, gewellte Blätter $f^{-1}(c) \cap B_r^{n+\ell}(x_0,y_0)$, für $c \in \mathbb{R}^\ell$, und verformten diese simultan mittels $\mathcal{F}$ in einen „ℓ-dimensionalen Stapel aus n-dimensionalen glatten Blättern $\mathcal{U}_c \times \{c\}$" und insbesondere $f^{-1}(0) \cap B_r^{n+\ell}(x_0, y_0)$ in das Blatt $\mathcal{U}_0 \times \{0\} \subset B_r^n(x_0)$.

Da während dieser Verformung die ersten n Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ unverändert bleiben, hat die inverse Verformung $\Phi|_{U_0 \times \{0\}}$ die einfache Form $\Phi(x,0) = (x, h_1(x), \ldots, h_\ell(x))$, sodaß also $f^{-1}(0) \cap B_r^{n+\ell}(x_0, y_0)$ als Graph von h über $U_0 \subset B_r^n(x_0)$ beschrieben werden kann.

§ 3 Tangentialräume

Definition 3.1

a) Sei S eine n-dim. reg. C^k-Hyperfläche im $\mathbb{R}^{n+l}$ und $z \in S$ ein fester Punkt. Wir definieren

$$T_z S := \left\{ \dot{\alpha}(0) \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow[C^k]{} S \text{ mit } \alpha(0) = z \\ \text{beliebiger regulärer Weg} \end{array} \right\}$$

als den „Tangent.raum" an S in z.

b) $$TS := \left\{ (z, v) \in S \times \mathbb{R}^{n+l} \;\middle|\; v \in T_z S \right\}$$

heiße das „Tangentialbündel" von S.

Lemma 3.1

Sei $z^* \in S$ beliieb. fixiert, S wie in Def. 3.1, und sei $B_r(z^*)$ eine hinreichend kleine Umgebung sodaß $B_r(z^*) \cap S = \text{Bild}(\Phi)$ für eine Karte(nparametris.) $\Phi : U \xrightarrow{\cong} B_r(z^*) \cap S$.

So gilt $T_{z^*}S = \text{Bild}\, D\Phi(\underbrace{\Phi^{-1}(z^*)}_{=:x^*}) = U\text{-VRaum}$ des $\mathbb{R}^{n+k}$

und insbesondere ist $\dim T_{z^*}S = n$.

Bew.:

Sei $v \in T_{z^*}S$. So existiert also ein C^k-Weg $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ mit $\alpha(0) = z^*$ und $v = \dot{\alpha}(0)$.

Für $\tilde{\alpha} := \Phi^{-1} \circ \alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ gilt dann

$$\tilde{\alpha}(0) = x^* \quad \text{und} \quad \dot{\tilde{\alpha}}(0) = D\Phi^{-1}(z^*) \cdot \underbrace{\dot{\alpha}(0)}_{=v} =: \tilde{v} \in \mathbb{R}^n.$$

$$\Rightarrow D\Phi(x^*)(\tilde{v}) = \underbrace{D\Phi(x^*)\big(D\Phi^{-1}(z^*)}_{=1} \cdot v\big) = v$$

$\Rightarrow D\Phi(x^*)$ ist surjektiv auf $T_{z^*}S$.

Sei nun umgekehrt $\tilde{v} \in \mathbb{R}^n \hat{=} T_{x^*}(\mathcal{U})$ beliebig

$\Rightarrow \exists$ Weg $\tilde{\alpha} : (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow[C^k]{} \mathcal{U}$ mit $\tilde{\alpha}(0) = x^*$ und

$\dot{\tilde{\alpha}}(0) = \tilde{v}$.

$\leadsto$ Für $\alpha := \Phi \circ \tilde{\alpha}$ gilt somit:

$$D\Phi(x^*) \cdot \tilde{v} = D\Phi(\tilde{\alpha}(0)) \cdot \dot{\tilde{\alpha}}(0) = \dot{\alpha}(0)$$

und $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S \cap B_r(z^*)$, $\alpha(0) = z^*$

$$\Rightarrow D\Phi(x^*) \cdot \tilde{v} \in T_{z^*} S \qquad \checkmark$$

Da $\operatorname{rang} D\Phi(x^*) = n$ (nach Def. von S) gilt folgt insbesondere, daß $T_{z^*} S$ ein U-VRaum des $\mathbb{R}^{n+l}$ der Dimension n sein muß! $\square$

Definition 3.2

a) Sei S eine n-dimensionale regul. C^k-Hyperfläche im $\mathbb{R}^{n+l}$ und $z \in S$ ein fester Punkt. Wir definieren den Normalraum $T_z^\perp S$ als das orthogonale Komplement von $T_z S$ in $\mathbb{R}^{n+l}$, also $T_z^\perp S = \{ v \in \mathbb{R}^{n+l} \mid \langle v, t \rangle = 0 \ \forall t \in T_z S \}$.

b) $T^\perp S := \{ (z, v) \in S \times \mathbb{R}^{n+l} \mid v \in T_z^\perp S \}$

heiße das "Normalenbündel" von S.

Lemma 3.2

Sei S wie in Def. 3.2, $z_0 \in S$ ein fester Punkt und $r > 0$ hinreichend klein, sodaß $S \cap B_r^{n+l}(z_0) = f^{-1}(0)$ für ein $f \in C^k(B_r^{n+l}(z_0), \mathbb{R}^l)$ mit $\text{Rang}\, Df(z_0) = l$.

So gilt $T_{z_0}^\perp S = \text{Span}\{ \nabla f_1(z_0), \ldots, \nabla f_l(z_0) \}$.

Beweis:

Sei $v \in T_{z_0} S$ beliebig gewählt, so exist. eine C^k-Kurve $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ mit $\alpha(0) = z_0, \dot{\alpha}(0) = v$.

Aus $f(\alpha(t)) \equiv 0 \Rightarrow 0 \equiv \frac{d}{dt} f_j(\alpha(t))$

$$= \langle \nabla f_j(\alpha(t)), \dot{\alpha}(t) \rangle, j = 1, \dots, l$$

Also in $t = 0$: $0 = \langle \nabla f_j(z_0), v \rangle$ für $j = 1, \dots, l$.

$\Rightarrow \nabla f_j(z_0) \in T_{z_0}^{\perp} S$, und da diese l Vektoren nach Voraussetzung linear unabhängig sind und $\dim T_{z_0}^{\perp} S = (n+l) - n = l$, folgt die Behauptung. $\square$

Korollar 3.1

Es ist $T_{z_0} S = \operatorname{Kern}(Df(z_0))$ $\square$

Beispiele: a) $S^n = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x|^2 - 1 = 0 \}$

Da $\nabla(|x|^2) = 2x \Rightarrow T_x S^n = \{ v \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle v, x \rangle = 0 \}$

und $T_x^{\perp} S^n = \operatorname{Span} x$

b) $SL_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathrm{Mat}_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \det A - 1 = 0 \}$

Für $Y = (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, $H = (H_1, \ldots, H_n)$ gilt

$$\begin{aligned} \det(Y+H) = {} & \det(Y) \\ & + \det(H_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n) \\ & + \det(Y_1, H_2, Y_3, \ldots, Y_n) \\ & \quad \vdots \\ & + \det(Y_1, Y_2, Y_3, \ldots, H_n) + \text{„}O(|H^2|)\text{"} \end{aligned}$$

Summe von Produkten, in denen mindestens zwei Elemente aus H auftauchen.

$\Rightarrow$ Das Differential $d f(Y)(H)$ der Funktion

$f(Y) := \det(Y) - 1$ in Anwendung auf H

lautet: $\det(H_1, Y_2, Y_3, \ldots, Y_n)$

$+ \det(Y_1, H_2, Y_3, \ldots, Y_n) + \ldots$

$\ldots + \det(Y_1, Y_2, \ldots, H_n)$

Speziell für $Y = 1_n$ ergibt der Laplace'sche Entwicklungssatz:

$$df(1_n)(H) = H_{11} + H_{22} + \ldots + H_{nn} = \operatorname{Spur} H$$

$$\Rightarrow T_{1_n} SL_n(\mathbb{R}) = \{ H \in Mat_{n,n}(\mathbb{R}) \mid \operatorname{Spur} H = 0 \}.$$