23.05.09

6. Differentialgeometrie-Vorlesung

§4 Tangentialvektorfelder und Flüsse auf Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^{n+l}$

Def. 4.1 Eine lokal Lipsch. stetige Abb. V von einer regulären C^k-Untermfkeit $S \subset \mathbb{R}^{n+l}$ in den $\mathbb{R}^{n+l}$ heißt

a) ein Tangentialvektorfeld an S, falls

$$V(z) \in T_z S \quad \forall z \in S$$

b) ein Normalenfeld auf S, falls

$$V(z) \in T_z^{\perp} S \quad \forall z \in S$$

gilt.

Sei nun $V : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n+l}$ ein lokal-Lipschitz-stetiges $\underbrace{\text{Vektorfeld}}_{\text{und beschränktes}}$ auf einer offenen

Umgebung Ω einer n-dim. regul. Untermfkeit S des $\mathbb{R}^{n+l}$. Aus unserem Satz 1.4 (Picard-Lindelöf) läßt sich mittels des Zornschen Lemmas ableiten, daß es zu jedem Startwert $X_0 \in \Omega$ ein maximales Intervall $I(X_0) = (T_-, T_+)$ gibt, auf dem genau eine Lösung X des

$$(AWP)'_S \quad \dot{X}(t) = V(X(t)), \quad X(0) = X_0, \quad t \in I$$

existiert und daß für $t \to T_\pm$:

entweder $|X(t)| \to \infty$ oder $\mathrm{dist}(X(t), \partial\Omega) \to 0$

gelten muß.

Satz 4.1

Falls die Einschränkung $V|_S$ ein Tangentialvektorfeld an S ist und $X_0 \in S$, so gilt $X(t) \in S \quad \forall t \in I(X_0)$ für die maximale Lösung X des (AWP) $\dot{X} = V(X)$

$$X(0) = X_0 .$$

<u>Beweis</u> (I) Nach Defin. von S existiert eine Familie $\{B_i\}_{i \in J}$ von offenen Bällen im $\mathbb{R}^{n+l}$, sodaß $S \cap B_i = f_i^{-1}(0)$ für Funktionen $f_i \in C^k(B_i, \mathbb{R}^l)$ mit Rang $Df_i = l$.

Sei OBDA $X_0 \in B_1$, so gilt: $(f_i = (f_i^1, \dots, f_i^l))$.

$$\frac{d}{dt} f_1^j(X(t)) = \left\langle \nabla f_1^j(X(t)), V(X(t)) \right\rangle \equiv 0$$

$$\forall t \in I_1 := \{ t \in I \mid X(t) \in B_1 \} = \text{offen in } I.$$

$$\Rightarrow f_1^j(X(t)) \equiv \text{const.} = f_1^j(X_0) = 0, \; j = 1, \dots, l$$

$\forall t \in I_1$, da $X_0 \in S \cap B_1 = f_1^{-1}(0)$.

$\Leftrightarrow \ \Phi(t) \in S \cap B_1 \quad \forall t \in I_1.$

II) Fall 1: $I_1 = I$. Dann bereits fertig ✓

Fall 2: $\exists t^* \in I$, sodaß $\Phi(t^*) \in B_{i^*} \setminus B_1$

für ein $i^* \in J \setminus \{1\}$. OBDA sei $t^* > 0$.

Dann muß es eine Teilfamilie $\{\tilde{B}_1, \tilde{B}_2, \ldots, \tilde{B}_k\}$ aus k (also endlich vielen) Bällen von $\{B_i\}_{i \in I}$ mit $\tilde{B}_1 = B_1$ und $\tilde{B}_k = B_{i^*}$ geben, sodaß

$\Phi([0, t^*]) \subset \tilde{B}_1 \cup \tilde{B}_2 \cup \ldots \cup \tilde{B}_k$ und sodaß

$\tilde{B}_\ell \cap \tilde{B}_{\ell+1} \neq \emptyset$ für $\ell = 1, \ldots, k-1$.

Ist nun $t_{12} \in I$ mit $\Phi(t_{12}) \in \tilde{B}_1 \cap \tilde{B}_2$ so gilt $\Phi(t_{12}) \in S$ nach Schritt I, da $\tilde{B}_1 = B_1$, und somit $f_{i_2}(\Phi(t_{12})) = 0$, wenn

$\tilde{B}_2 = B_{i_2}$ ist. Also für $f_{i_2} = (f_{i_2}^1, \ldots, f_{i_2}^l)$:

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} f_{i_2}^j(X(t)) = \langle \nabla f_{i_2}^j(X(t)), V(X(t)) \rangle$$

$$\equiv 0 \quad , \text{ da } V \text{ tangential ist}$$

$$\forall t \in I_{i_2} := \{ t \in I \mid X(t) \in B_{i_2} = \tilde{B}_2 \}$$

$$\Rightarrow f_{i_2}^j(X(t)) \equiv \text{const.} = f_{i_2}^j(X(t_{12})) = 0$$

$$\forall t \in I_{i_2}, \quad \text{für } j = 1, \ldots, l$$

$$\Leftrightarrow X(t) \in S \cap \tilde{B}_2 \quad \forall t \in I_{i_2}$$

Per abbrechender Induktion erhält man

also $X(t) \in S \cap \tilde{B}_l$ für jedes

$$t \in \{ t \in I \mid X(t) \in \tilde{B}_l \}, \quad l = 1, \ldots, k$$

und insbesondere $X(t^*) \in S$ für $l = k$.

$$\Rightarrow X(I) \subset S \qquad \square$$

Definition 4.2

Ein (lokal-Lipschitz-stetiges) beschrän. Tangentialvektorfeld V an eine n-dimens. Untermfkeit $S \subset \mathbb{R}^{n+l}$ heiße vollständig, falls zu jedem Startwert $\underline{X}_0 \in S$ die eindeut. Lös. $\underline{X}$ des (AWP)'s $\dot{\underline{X}} = V(\underline{X})$, $\underline{X}(0) = \underline{X}_0$, für alle Zeiten $t \in \mathbb{R}$ existiert, also falls $I(\underline{X}_0) = \mathbb{R}$, $\forall \underline{X}_0 \in S$.

Proposition 4.1

Ist S kompakt, so ist jedes Tangentialvektorfeld an S vollständig.

Beweis: Sei $\underline{X}_0 \in S$ beliebig gewählt und V ein beliebl. Tangent. vektorfeld an S.

Aus Satz 4.1 wissen wir, daß die maximale Lösung X des (AWP)'s $\dot{X} = V(X)$, $X(0) = X_0$, ganz in S verlaufen muß.

Da S kompakt ist, exist. eine Konstante M, sodaß $\|V(z)\| \leq M \quad \forall z \in S$ gilt.

$$\Rightarrow \|X(t_1) - X(t_2)\| = \left|\int_{t_1}^{t_2} \dot{X}(t)\,dt\right|$$

$$\leq M|t_2 - t_1|, \text{ für belieb. } t_1, t_2 \in \underbrace{(T_-, T_+)}_{= I(X_0)}$$

Wäre also beispielsweise $T_+ < \infty$ und $\{t_k\}$ eine beliebige Folge mit $t_k \to T_+$, so wäre $\{X(t_k)\}$ eine Cauchy-Folge im $\mathbb{R}^{n+l}$ und es existierte $P^* = \lim_{k\to\infty} X(t_k)$ und somit $=: X(T_+) \in S$

$$
\begin{array}{ccc}
\dot{X}(t_k) & = & V(X(t_k)) \\
\Big\downarrow & k\to\infty & \Big\downarrow \\
\dot{X}(T_+) & := & V(X(T_+)) = V(P^*) \in T_{P^*}S
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ X könnte also als Lösung unseres (AWP)'s in den Punkt $t = T_+$ hinein fortgesetzt werden und damit sogar über diesen hinaus, wie im Beweis von Satz 1.5.
(„Lösung anschweißen")

Da dies der angeblichen Maximalität von $I(X_0)$ widerspricht, folgt $T_+ = \infty$.

Analog: $T_- = -\infty$ $\square$

<u>Definition 4.3</u>

Sei V ein vollständiges Tangential VF an eine n-dim. Untermfkeit $S \subset \mathbb{R}^{n+l}$, so defin. wir den Fluß $\varphi : S \times \mathbb{R} \longrightarrow S$ zu V auf S durch $\varphi(z, t) :=$ Lös. $X(t)$ von $\dot{X} = V(X)$

mit $X(0) = z$.

Wegen $\varphi(z, t_1 + t_2) = \varphi(\varphi(z, t_1), t_2)$

oder $= \varphi(\varphi(z, t_2), t_1)$, $\forall t_1, t_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $z = \varphi(z, 0) = \varphi(z, t - t) = \varphi(\varphi(z, t), -t)$

$\forall z \in S$, $\forall t \in \mathbb{R}$ oder $= \varphi(\varphi(z, -t), t)$,

d.h. $Id_S = \varphi(\cdot, t) \circ \varphi(\cdot, -t)$

$= \varphi(\cdot, -t) \circ \varphi(\cdot, t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Der Fluß $\{\varphi(\cdot, t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ auf S besteht aus einer „einparametrigen Schar" von Homöomorphismen von S auf S.

Seien nun zwei beliebige Tangentialvektorfelder V und $\tilde{V}$ an S gegeben.

<u>Frage</u>: Unter welchen Bedingungen an V und $\tilde{V}$ kommutieren die beiden von V und $\tilde{V}$ erzeugten Flüsse φ und $\tilde{\varphi}$ auf S miteinander, d.h. wann gilt

$$\varphi(\cdot,t)\circ\tilde{\varphi}(\cdot,\tilde{t}) = \tilde{\varphi}(\cdot,\tilde{t})\circ\varphi(\cdot,t) \; ? \quad \forall t,\tilde{t}\in\mathbb{R}$$

$\rightsquigarrow$ <u>Definition 4.4</u>

Seien zwei C^∞-Vektorfelder $V,\tilde{V}$ auf einer offenen Umgebung Ω einer n-dim. C^∞-Untermfkeit $S\subset\mathbb{R}^{n+l}$ gegeben (ohne weitere Voraussetzungen an deren Einschränkung auf S).

So definieren wir deren „Kommutator-Feld"

$[V,\tilde{V}]: \Omega \xrightarrow[C^\infty]{} \mathbb{R}^{n+l}$ durch:

$$[V,\tilde{V}](z) := \begin{pmatrix} \langle V, \nabla \tilde{V}_1 \rangle - \langle \tilde{V}, \nabla V_1 \rangle \\ \langle V, \nabla \tilde{V}_2 \rangle - \langle \tilde{V}, \nabla V_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle V, \nabla \tilde{V}_{n+l} \rangle - \langle \tilde{V}, \nabla V_{n+l} \rangle \end{pmatrix}(z).$$

<u>Proposition 4.2</u>

Sind V und $\tilde{V}$ wie oben in Definition 4.4, so hat ebenfalls deren Kommutator-Feld $[V,\tilde{V}] \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+l})$ die Eigenschaft, entlang S tangential zu sein, also $[V,\tilde{V}](z) \in T_z S$, $\forall z \in S$, falls die Einschränkungen $V|_S$, $\tilde{V}|_S$ Tangential V.F. auf S sind.

Beweis: Aufg. 21 (a)

Satz 4.2

Seien $V, \tilde{V} \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^{n+l})$ zwei Vektorfelder auf einer offenen Umgeb. Ω einer n-dim. C^∞-Untermfkeit $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^{n+l}$, deren Einschränkungen auf S vollständige Tangent. V Felder seien. So gilt für deren Flüsse $\varphi, \tilde{\varphi} : S \times \mathbb{R} \to S$:

$$\varphi(\cdot, t) \circ \tilde{\varphi}(\cdot, \tau) = \tilde{\varphi}(\cdot, \tau) \circ \varphi(\cdot, t), \; t, \tau \in \mathbb{R}$$

genau dann wenn $[V, \tilde{V}] \equiv 0$ auf S.

Beweis-Skizze:

Gelte zunächst $[V, \tilde{V}] \equiv 0$ auf S.

Wir fixieren ein $z \in S$ beliebig und kürzen ab:

$$Y(r,t) := (Y^1(r,t), Y^2(r,t), \ldots, Y^{n+l}(r,t))$$
$$:= \tilde{\varphi}(\varphi(z,t), r)$$

$$Z(r,t) := \varphi(\tilde{\varphi}(z,r), t).$$

Einerseits gilt $\frac{\partial}{\partial t} Z(r,t) = V(Z(r,t))$, andererseits $\frac{\partial}{\partial r} Y(r,t) = \tilde{V}(Y(r,t))$.

Wir versuchen, zu zeigen, daß

$$\lambda(r,t) := \frac{\partial}{\partial t} Y(r,t) - V(Y(r,t)) \quad (\lambda)$$

verschwindet. Wir leiten noch einmal nach t ab:

$$\frac{\partial^2}{\partial r \partial t} Y(r,t) = \sum_{j=1}^{n+l} \frac{\partial}{\partial z_j} \tilde{V}(Y(r,t)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} Y^j(r,t)$$

$$\underset{(\lambda)}{=} \sum_{j=1}^{n+l} \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \tilde{V}(Y)\, \lambda^j\right)(r,t) + \left(\frac{\partial}{\partial z_j} \tilde{V}(Y) \cdot V^j(Y)\right)(r,t)$$

Leiten wir λ nach r ab, also

$$\lambda_\tau(r,t) = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial t\,\partial r} Y(r,t)}_{\parallel} - \sum_{j=1}^{n+l}\Big(\frac{\partial}{\partial z_j} V(Y)\cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial \tau} Y^j}_{=\tilde{V}^j(Y)}\Big)(r,t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r\partial t} Y(r,t)$$

$$\Rightarrow \lambda_r(r,t) = \sum_{j=1}^{n+l}\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\tilde{V}(Y)\cdot\lambda^j\Big)(r,t)$$

$$+\underbrace{\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\tilde{V}(Y)\cdot V^j(Y) - \frac{\partial}{\partial z_j}V(Y)\tilde{V}^j(Y)\Big)}_{\parallel}$$

$$\equiv \sum_{j=1}^{n+l}\Big(\frac{\partial}{\partial z_j}\tilde{V}(Y)\,\lambda^j\Big)(r,t) + [V,\tilde{V}](Y)(r,t)$$

Da wir wissen, daß $\varphi(\ ,t)$ und $\tilde{\varphi}(\cdot,r) : S \to S$

$$\Rightarrow Y(r,t)\in S, \text{ also } [V,\tilde{V}](Y)(r,t) \equiv 0$$

$\Rightarrow \lambda(\cdot,t)$ löst das lineare AWP:

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\lambda(\cdot,t) = D_z\tilde{V}(Y(\cdot,t))\cdot\lambda(\cdot,t) \quad \text{auf } \mathbb{R}$$

$$\text{mit } \lambda(0,t) = \frac{\partial}{\partial t} Y(0,t) - V(Y(0,t))$$

$$\equiv \frac{\partial}{\partial t}\varphi(z,t) - V(\varphi(z,t)) \equiv 0$$

für jedes $t\in\mathbb{R}$

Dieses AWP hat die eindeutige Lösung $\lambda(\cdot, t) \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$, für jedes $t \in \mathbb{R}$, also

$$\frac{\partial}{\partial t} Y(r,t) = V(Y(r,t)) \quad \forall (r,t) \in \mathbb{R}^2$$

und $\frac{\partial}{\partial t} Z(r,t) = V(Z(r,t))$ ebenfalls

und $Y(r,0) = \tilde{\varphi}(z,r) = Z(r,0)$ für jedes r

Somit folgt wieder aus der Eindeutigkeit der Lösungen von AWP's 1. Ordnung (Satz 1.4): $Z(r,t) \equiv Y(r,t)$, $\forall (r,t) \in \mathbb{R}^2$ ✓

Gelte nun umgekehrt das Kommutieren von $\tilde{\varphi}(\cdot, r)$ mit $\varphi(\cdot, t)$: Aufg. 21 (b)!

Hinweis: Berechne $\forall z \in S$ und für $f \in C^\infty(\Omega)$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial t}\Big(f\big(\varphi(\tilde{\varphi}(z,r),t)\big)\Big) - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}\Big(f\big(\tilde{\varphi}(\varphi(z,t),r)\big)\Big)$$

□