§5) Orientierbarkeit, Gauß- und Weingartenabbildung, Krümmung

Sei $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit und $\{B^{n+1}_{r_\alpha}(z_\alpha), f_\alpha\}_{\alpha\in I}$ mit $S \cap B^{n+1}_{r_\alpha}(z_\alpha) = f_\alpha^{-1}(0)$, $z_\alpha \in S$, $f_\alpha \in C^k(B^{n+1}_{r_\alpha}(z_\alpha))$, und $\nabla f_\alpha(z) \neq 0$ $\forall z \in B^{n+1}_{r_\alpha}(z_\alpha) \cap S$, sowie $S \subset \bigcup_{\alpha\in I} B^{n+1}_{r_\alpha}(z_\alpha)$.

Es wird durch $\dfrac{\nabla f_\alpha}{|\nabla f_\alpha|}$ ein Normalenfeld an $S \cap B^{n+1}_{r_\alpha}(z_\alpha)$ der konstanten Länge 1 definiert. Für einen beliebigen Punkt $z \in S$, der im Durchschnitt $B^{n+1}_{r_\alpha}(z_\alpha) \cap B^{n+1}_{r_\beta}(z_\beta)$ zweier „Karten" enthalten ist, kann entweder $\dfrac{\nabla f_\alpha(z)}{|\nabla f_\alpha(z)|} = \dfrac{\nabla f_\beta(z)}{|\nabla f_\beta(z)|}$ oder

$$\frac{\nabla f_\alpha(z)}{|\nabla f_\alpha(z)|} = -\frac{\nabla f_\beta(z)}{|\nabla f_\beta(z)|} \text{ gelten.}$$

Definition 5.1

Falls es zu einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit $S \subset R^{n+1}$ ein „Kartensystem" $\{B^{n+1}_{r_\alpha}(z_\alpha), f_\alpha\}_{\alpha \in I}$ mit allen obigen Eigenschaften gibt, sodaß zusätzlich

$\dfrac{\nabla f_\alpha}{|\nabla f_\alpha|} \equiv \dfrac{\nabla f_\beta}{|\nabla f_\beta|}$ auf jedem nicht-leeren

Durchschnitt $S \cap B^{n+1}_{r_\alpha}(z_\alpha) \cap B^{n+1}_{r_\beta}(z_\beta)$ gilt,

so nennen wir S orientierbar.

Bemerkung: a) Ist S eine orientierbare n-dim. C^k-Mfkeit im $\mathbb{R}^{n+1}$, so können wir also ein „Einheitsnormalenfeld" $N: S \to \mathbb{S}^n$ auf ganz S von der Klasse C^{k-1} durch die Vorschrift $N(z) := \frac{\nabla f_\alpha}{|\nabla f_\alpha|}(z)$ für $z \in B^{n+1}_{r_\alpha}(z_\alpha) \cap S$ (ohne Zweideutigkeiten) definieren.

b) Aus $|N|^2 \equiv 1$ auf S erhalten wir durch Ableiten in einem belieb. Punkt $z \in S$ in Richtung eines belieb. $v \in T_z S$:

$$2 \cdot \langle N(z), DN(z) \cdot v \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad DN(z) : T_z S \longrightarrow T_z S \quad \text{ist ein}$$

V-Raum-Endomorphismus, $\forall z \in S$.

Definition 5.2

Wir nennen $L_z := -DN(z)\big|_{T_zS} \in \mathrm{End}(T_zS)$ die „Weingarten-Abbildung" einer durch $N : S \longrightarrow \mathbb{S}^n$, $N(z) \in T_z^\perp S$, orientierten n-dim. Untermfkeit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Satz 5.1

L_z ist bzgl. $\langle \cdot , \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$ selbstadjungiert, $\forall z \in S$.

Beweis:

Wir fixieren ein $z \in S$ und wählen ein $\alpha \in I$ mit $z \in S \cap B^{n+1}_{r_\alpha}(z_\alpha) = f_\alpha^{-1}(0)$. Sei $\lambda := \frac{1}{|\nabla f_\alpha|}$, also $N = \lambda \cdot \nabla f_\alpha$ auf $f_\alpha^{-1}(0)$, so gilt:

$$\langle w, L_z(v)\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \langle w, -D((\lambda \nabla f_\alpha)(z))\cdot v\rangle$$

$$= -\lambda \langle w, (D\nabla f_\alpha(z))\cdot v\rangle - \langle D\lambda(z), v\rangle \underbrace{\langle w, \nabla f_\alpha(z)\rangle}_{=0}$$

für $w \in T_z S$

$$= -\lambda \langle w, (\mathrm{Hess}\, f_\alpha(z))\cdot v\rangle$$

symmetrisch!

$$= -\lambda \langle v, (\mathrm{Hess}\, f_\alpha(z))\, w\rangle$$

$$= \langle v, L_z(w)\rangle \quad \forall v, w \in T_z S$$

$\square$

$\Longleftrightarrow$ $\langle -, L_z(-)\rangle$ liefert eine symmetrische Bilinearform auf $T_z S$:

Definition 5.3

Man nennt $\langle v, L_z(w)\rangle =: I\!I_z(v,w)$ die 2. Fundamentalform von S in z und

$\mathrm{II}_z(v) := \mathrm{II}_z(v,v)$ die sich aus dieser ergebende quadratische Form auf $T_z S$, $\forall z \in S$.

In Paragraph 1 definierten wir die Krümmung κ einer C^3-Kurve α mit $|\dot{\alpha}| \equiv 1$ durch $\kappa(s) := |\ddot{\alpha}(s)|$. Da $\ddot{\alpha}(s) \perp \dot{\alpha}(s)$, also $\ddot{\alpha}(s) \in T^{\perp}_{\alpha(s)} \mathrm{Bild}(\alpha)$ ist, gilt also $\kappa(s) = |\langle \ddot{\alpha}(s), N(\alpha(s)) \rangle|$ für gerade das Einheitsnormalenfeld $N(\alpha(s)) := \dfrac{\ddot{\alpha}(s)}{|\ddot{\alpha}(s)|}$.

Man könnte nun durch einen Punkt $z \in S$ eine Kurve α mit $\alpha(0) = z$ laufen lassen und analog den Ausdruck $\langle \ddot{\alpha}(0), N(\alpha(0)) \rangle$ als ein Maß für die Krümmung von S in Richtung von $\dot{\alpha}(0)$ verstehen. Jedoch:

Warum ist dieser Begriff wohldefiniert, also nur von $\dot{\alpha}(0)$ (und nicht von $\ddot{\alpha}(0)$) abhängig?

<u>Proposition 5.2</u>

Es gilt $\langle N(\alpha(0)), \ddot{\alpha}(0)\rangle = \langle L_{\alpha(0)}(\dot{\alpha}(0)), \dot{\alpha}(0)\rangle$

$$\equiv \mathrm{II}_{\alpha(0)}(\dot{\alpha}(0)),$$

für jede C^k-Kurve $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$.

<u>Bew.:</u> Wegen $\langle \dot{\alpha}(t), N(\alpha(t))\rangle \equiv 0 \ \forall t$

$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\langle \dot{\alpha}(t), N(\alpha(t))\rangle\Big|_{t=0}$$

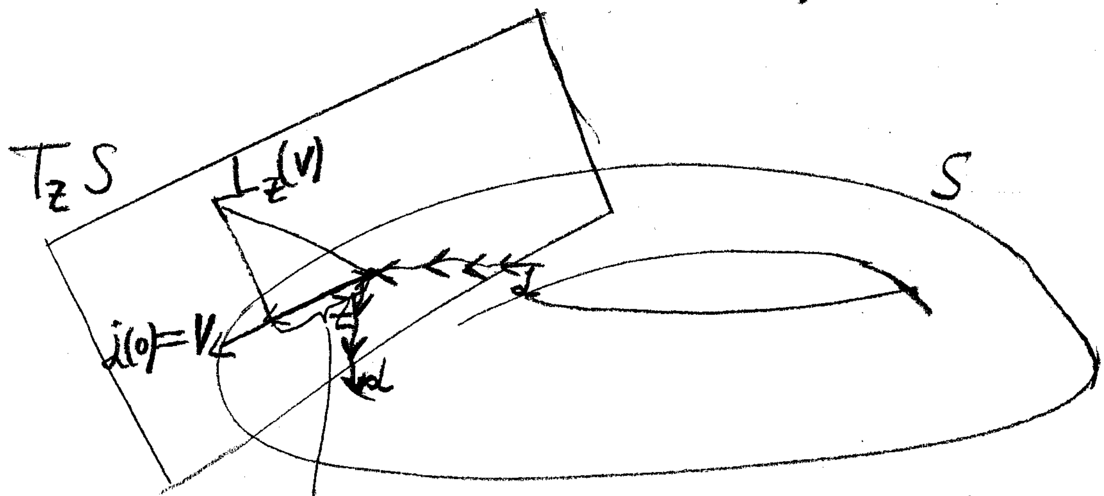
$$= \langle \ddot{\alpha}(0), N(\alpha(0))\rangle + \langle \dot{\alpha}(0), DN(\alpha(0))\cdot\dot{\alpha}(0)\rangle$$

□

⟹ Definition 5.4

Sei S (wie oben) eine mittels $N: S \to S^n$ orientierte n-dim. Untermfkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ und $L_z := -DN(z)|_{T_zS}$ deren Weingarten-Abbild, so definieren wir die „Normalkrümmung" $k_z^S(v)$ von S in z in Richtung $v \in T_zS$

durch $k_z^S(v) := \langle v, L_z(v) \rangle \equiv \mathrm{II}_z(v)$.



$= k_z^S(v)$, falls $|v| = 1$ und $\underset{\dot{\alpha}(0)}{\overset{v}{\shortparallel}} \in T_zS$.

Da wir nun aus Satz 5.1 bereits wissen,

daß L_z selbstadjungiert ist, folgern wir aus LA, daß es eine orthonormale Basis $\{e_1(z), \ldots, e_n(z)\}$ von $T_z S$ gibt, sodaß die Matrix $M(L_z) \in Mat_{n,n}(\mathbb{R})$ von L_z bzgl. dieser Basis Diagonalgestalt $\operatorname{diag}(\kappa_1(z), \ldots, \kappa_n(z))$ hat, sodaß also $L_z(e_i(z)) = \kappa_i(z)\, e_i(z)$, $i = 1, \ldots, n$ gilt.

<u>Definition 5.5</u>

a) Man nennt diese orthonormalen Eigenvektoren von L_z die Hauptkrümmungsrichtungen von S in z und die zu diesen gehörenden Eigenwerte $\kappa_i(z)$ die Haupt-krümmungen von S in z, $i = 1, \to n$.

b) Man definiert außerdem die „mittlere Krümmung" $H_S(z)$ von S in z durch

$$H_S(z) := \frac{1}{n}\left(\kappa_1(z) + \dots + \kappa_n(z)\right)$$
$$\equiv \frac{1}{n}\ \mathrm{Spur}(L_z) \quad \text{und}$$

c) die „Gaußsche Krümmung" $K_S(z)$ von S in z durch $K_S(z) := \kappa_1(z) \cdot \kappa_2(z) \cdots \kappa_n(z)$

$$\equiv \det(L_z)$$

<u>Beispiele</u> a) $S = \text{Zylinder} = f^{-1}(0)$

mit $f(z) := z_1^2 + z_2^2 - 1$

$$\Rightarrow N(z) = \frac{\nabla f}{|\nabla f|}(z) = \frac{(z_1, z_2, 0)}{(z_1^2 + z_2^2)^{1/2}}, \quad z \in S$$

$$\Rightarrow \quad -DN(z) = \begin{pmatrix} z_1^2-1 & z_1 z_2 & 0 \\ z_2 z_1 & z_2^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$T_z S$ wird beispielsweise von der orthonormalen Basis $\left\{ \begin{pmatrix} -z_2 \\ z_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ aufgespannt, und dies sind in der Tat zwei Eigenvektoren von L_z:

$$L_z \begin{pmatrix} -z_2 \\ z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (z_1^2-1)(-z_2)+(z_1 z_2) z_1 \\ z_2 z_1(-z_2)+(z_2^2-1) z_1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1)\cdot \begin{pmatrix} -z_2 \\ z_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L_z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ -1 und 0 sind die Hauptkrümmungen $\mathcal{K}_1(z), \mathcal{K}_2(z)$ des Zylinders S in jedem seiner Punkte z, und zwar mit den Hauptkr.richtungen $\begin{pmatrix} -z_2 \\ z_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) Ellipsoid $E = f^{-1}(0)$ mit

$$f(z) := \frac{z_1^2}{a^2} + \frac{z_2^2}{b^2} + \frac{z_3^2}{c^2} - 1.$$

Berechne in Aufg. 25, daß sich dann

$$DN(z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{a^2 K(z)^{3/2}} \left(\left(\frac{z_2^2}{b^4} + \frac{z_3^2}{c^4}\right), -\frac{z_1 z_2}{b^4}, -\frac{z_1 z_3}{c^4} \right) \\ \frac{1}{b^2 K(z)^{3/2}} \left(-\frac{z_2 z_1}{a^4}, \left(\frac{z_1^2}{a^4} + \frac{z_3^2}{c^4}\right), -\frac{z_2 z_3}{c^4} \right) \\ \frac{1}{c^2 K(z)^{3/2}} \left(-\frac{z_3 z_1}{a^4}, -\frac{z_3 z_2}{b^4}, \left(\frac{z_1^2}{a^4} + \frac{z_2^2}{b^4}\right) \right) \end{pmatrix}$$

mit $K(z) := \frac{z_1^2}{a^4} + \frac{z_2^2}{b^4} + \frac{z_3^2}{c^4}$ ergibt.

Aus Aufg. 17 (a) ist bekannt, daß für

$z \in E \setminus \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \pm c \end{pmatrix} \right\}$ gilt:

$$T_z E = \operatorname{Span} \left\{ \begin{pmatrix} z_2/b^2 \\ -z_1/a^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{z_1 z_3}{a^2 c^2} \\ -\frac{z_2 z_3}{b^2 c^2} \\ z_2^2/b^4 + z_1^2/a^4 \end{pmatrix} \right\}$$

Aber dies sind leider im Allgemeinen nicht die beiden (orthogonalen) Eigenvektoren $\{e_i(z)\}$ von L_z, also nicht die Hauptkrümmungsrichtungen, die man finden muß, um die beiden Hauptkrümmungen $\mathcal{K}_1(z), \mathcal{K}_2(z)$ von E in z über $L_z(e_i(z)) = \mathcal{K}_i(z)\, e_i(z)$ zu bestimmen.

<u>Definition 5.6</u> (vgl. Definition 5.3)

Man nennt $\langle v, w\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \equiv \sum_{i=1}^{n+1} v_i w_i$, für $v, w \in T_z S$, die erste Fundamentalform $I_z(v,w)$ und

$$\langle L_z(v), L_z(w)\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} =: \mathrm{III}_z(v,w)$$

die dritte Fundamentalform von S in $z \in S$.

Mittels Ana II läßt sich leicht beweisen:

Lemma 5.3

Seien $\kappa_1(z) \le \kappa_2(z) \le \ldots \le \kappa_n(z)$ die Hauptkrümmungen von S in einem Punkt $z \in S$, so gilt:

$$\kappa_1(z) = \min \left\{ \frac{\mathrm{II}_z(v)}{\mathrm{I}_z(v)} \,\middle|\, v \in T_z S \setminus \{0\} \right\} = \mathrm{II}_z(e_1(z))$$

$$\kappa_2(z) = \min \left\{ \frac{\mathrm{II}_z(v)}{\mathrm{I}_z(v)} \,\middle|\, v \in \operatorname{Span}(e_1(z))^{\perp} \cap T_z S \setminus \{0\} \right\}$$

$$= \mathrm{II}_z(e_2(z))$$

$$\vdots$$

$$\kappa_n(z) = \min \left\{ \frac{\mathrm{II}_z(v)}{\mathrm{I}_z(v)} \,\middle|\, \underset{0}{\overset{v}{\#}} \in \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} \operatorname{Span}(e_i(z)) \right)^{\perp} \cap T_z S \right\}$$

$$= \max \left\{ \frac{\mathrm{II}_z(v)}{\mathrm{I}_z(v)} \,\middle|\, v \in T_z S \setminus \{0\} \right\} = \mathrm{II}_z(e_n(z))$$

Definition 5.7

Ein Punkt $z \in S$ heiße elliptisch, falls L_z entweder positiv oder negativ definit ist, also falls entweder

$$\mathrm{II}_z(v) > 0 \quad \text{oder} \quad \mathrm{II}_z(v) < 0 \quad \forall v \in T_zS \setminus \{0\}$$

erfüllt ist.

Dies ist äquivalent zur Eigenschaft

$$\mathcal{K}_i(z) > 0 \quad \text{oder} \quad \mathcal{K}_i(z) < 0 \quad \forall i \in \{1, \ldots, n\}.$$

Übungsaufgabe 29

Falls ein Punkt $z_0 \in S$ elliptisch ist, so gibt es ein $r > 0$, sodaß $S \cap B_r(z_0)$ „auf einer Seite von $T_{z_0}S + z_0$ liegt",

also sodaß $\langle z - z_0, N(z_0) \rangle > 0$ oder

$$\langle z - z_0, N(z_0) \rangle < 0 \quad \forall \underset{z \neq z_0}{z} \in S \cap B_r(z_0)$$

gilt, wobei $N(z_0)$ eine Einheitsnormale an S in z_0 sei. Stimmt auch die Umkehrung?

Satz 5.4

Jede kompakte orientierbare n-dimensionale Untermannigfaltigkeit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ enthält mindestens einen elliptischen Punkt.

Beweis:

Da S kompakt ist, existiert ein $R>0$ mit $S \subset B_R(0)$

$$\Rightarrow \exists\, r := \inf\{\tilde{r} \in \mathbb{R} \mid S \subset B_{\tilde{r}}(0)\} > 0.$$

Es gilt $S \cap \partial B_r(0) \neq \emptyset$. Sei $z_0 \in S \cap \underbrace{\partial B_r(0)}_{=:S'}$ fest gewählt. In diesem „Berührungspunkt" z_0 gilt entweder $N(z_0) = N'(z_0)$ oder $N(z_0) = -N'(z_0)$. OBDA können wir von der ersten

Möglichkeit ausgehen, nachdem wir die Sphäre $S' = \partial B_r(0)$ durch die Normale $N'(z) = -\frac{z}{r}$ orientiert haben.

Insbesondere gilt: $T_{z_0} S = T_{z_0} S'$, und wir können den $\mathbb{R}^{n+1}$ derart drehen, daß gerade $T_{z_0} S = \mathbb{R}^n \times \{0\} = T_{z_0} S'$ und

$$N(z_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = N'(z_0) \text{ erfüllt ist.}$$

Wir schreiben $z = (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Aus dem Satz über implizite Funktionen wissen wir, daß es ein $r > 0$ und eine Umgebung $\mathcal{U}$ von x_0 in $\mathbb{R}^n$, sowie ein $h \in C^k(\mathcal{U})$ mit $S \cap B_r(z_0) = \operatorname{graph}(h)$, und $h' \in C^\infty(\mathcal{U})$ mit $S' \cap B_r(z_0) = \operatorname{graph}(h')$ gibt.

Wegen $S \subset \overline{B_r(0)}$ muß nun nach der geeigneten Drehung des $\mathbb{R}^{n+1}$ „$S \cap B_r(z_0)$ über $S' \cap B_r(z_0)$ liegen", d.h. $h \geq h'$ gelten, sowie $h(x_0) = y_0 = h'(x_0)$ und

$$\nabla h(x_0) = (0, \ldots, 0) = \nabla h'(x_0) \; (\in \mathbb{R}^n). \qquad (*)$$

Nun wählen wir ein $v \in T_{z_0} S \triangleq \mathbb{R}^n \times \{0\}$ mit $|v| = 1$ beliebig und betrachten:

$$\alpha(t) := \begin{pmatrix} x_0 + tv \\ h(x_0 + tv) \end{pmatrix} : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S, \text{ und}$$

$$\alpha'(t) := \begin{pmatrix} x_0 + tv \\ h'(x_0 + tv) \end{pmatrix} : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S'.$$

Es gilt also $\alpha(0) = (x_0, h(x_0)) = z_0$ und
$\alpha'(0) = (x_0, h'(x_0)) = z_0$, sowie

$$\frac{d\alpha}{dt}(0) = (v, \underbrace{\nabla h(x_0)}_{=0} \cdot v) = (v, 0) = \frac{d\alpha'}{dt}(0)$$

Aus Proposition 5.2 folgt also:

$$k^S_{z_0}(v) \equiv \mathrm{II}^S_{z_0}(v) = \mathrm{II}^S_{\alpha(0)}\left(\frac{d\alpha}{dt}(0)\right)$$

$$= \langle \underbrace{N(z_0)}_{=(0,\dots,0,1)}, \frac{d^2\alpha}{dt^2}(0) \rangle = \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} h(x_0+tv)$$

und $k^{S'}_{z_0}(v) \equiv \mathrm{II}^{S'}_{z_0}(v) = \langle N'(z_0), \frac{d^2\alpha'}{dt^2}(0) \rangle$

$\overset{\shortparallel}{\frac{1}{r}}$ $$= \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} h'(x_0+tv)$$

denn $S' = \partial B_r(0)$ und dessen Weingarten-abbildung $L^{S'}_z = \frac{1}{r}\, id_{T_zS'}$, $\forall z \in S'$, da

$N'(z) = -\frac{z}{r}$.

Taylorentwicklung um $t=0$ liefert nun zusammen mit den Eigensch. (*):

$$0 \leq h(x_0+tv) - h'(x_0+tv)$$
$$= \frac{1}{2}t^2\left(\frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} h(x_0+tv) - \frac{d^2}{dt^2}\Big|_{t=0} h'(x_0+tv)\right) + o(t^2)$$

$$= \frac{1}{2} t^2 \left(k^S_{z_0}(v) - k^{S'}_{z_0}(v) \right) + o(t^2), \text{ für } |t| \to 0.$$

$$\Rightarrow k^S_{z_0}(v) \geq k^{S'}_{z_0}(v) \equiv \frac{1}{r} > 0 \quad \forall v \in T_{z_0}S = T_{z_0}S'$$
mit $|v| = 1$

$\Rightarrow z_0$ ist elliptischer Punkt von S □

Bemerkungen:

a) Ist S zusammenhängende, kompakte orientierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$, so ist äquivalent:

i) Jeder Punkt $z \in S$ ist elliptisch

ii) Gauß-Kr. $K_S(z) \neq 0$, $\forall z \in S$.

Beweis: Übungsaufgabe 30

Hinweis: Nutzt Satz 5.4 und die stetige Abhängigkeit der $k_i(z)$ von $z \in S$.

b) Im Beweis von Satz 5.4 benutzten wir, daß alle Hauptkrümmungen in einem beliebigen Punkt einer Sphäre $\partial B_r(0) = S_r$ mit dem Wert $\frac{1}{r}$ zusammenfallen, also daß $L_z = \frac{1}{r}\, id_{T_z S_r}$, in jedem $z \in S_r$ ist.

$\rightsquigarrow$ **Definition 5.8**

Wir nennen einen Punkt z einer orientierbaren n-dim. Untermfkt. $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ einen Nabelpunkt von S, falls $\kappa_1(z) = \kappa_2(z) = \dots = \kappa_n(z)$, also alle Hauptkrümmungen von S in z gleich sind.

Satz 5.5

Falls eine orientierbare, zusammenhängende n-dim. Untermfkt. $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, $n \geq 2$, nur aus

Nabelpunkten besteht, so muß S bereits in einer n-dim. Hyperebene oder in einer n-dim. Sphäre enthalten sein.

<u>Beweis</u>:

Wir fixieren einen Punkt $z_0 \in S$ und wählen ein $r>0$, sodaß $S \cap B_r(z_0) = \text{Bild}(\Phi)$, für ein $\Phi \in C^k(U, \mathbb{R}^{n+1})$, wobei $U \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\text{Rang}\, D\Phi \equiv n$ auf U ist. Wir führen die Koordinaten $(x^1, \ldots, x^n, y) = z \in U \times \mathbb{R}$ ein.

Da wir $-DN(z)\big|_{T_zS} \cdot v \equiv L_z \cdot v = \mathcal{K}(z) \cdot v$, $\forall v \in T_zS$, $\forall z \in S$ voraussetzen, können wir rechnen:

$$-\frac{\partial}{\partial x^i}(N \circ \Phi) = -DN(\Phi) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \mathcal{K}(\Phi) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$$

$$\Rightarrow -\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}(N \circ \Phi) = \frac{\partial(\mathcal{K} \circ \Phi)}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + \mathcal{K}(\Phi) \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j}$$

für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Da wir die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}$ von $N \circ \Phi$ und Φ vertauschen dürfen, erhalten wir insbesondere:

$$\frac{\partial(K \circ \Phi)}{\partial x^j} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \frac{\partial(K \circ \Phi)}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^j}, \quad \forall i, j, \text{ auf } U.$$

Wegen $n \geq 2$, gibt es zu jedem i ein $j \neq i$, sodaß aus der linearen Unabhängigkeit der Spaltenvektoren $\left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}\right\}$ von $D\Phi$ folgt:

$$\frac{\partial(K \circ \Phi)}{\partial x^j} \equiv 0 \quad \text{auf } U, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$\Leftrightarrow$ $K \equiv \text{konst.} =: K_0$ auf $\text{Bild}(\Phi) = S \cap B_r(z_0)$.

Da wir den Punkt $z_0 \in S$ beliebig wählten und S zusammenhängend ist, erhalten wir: $K \equiv K_0$ auf ganz S, und somit:

$$L_z \equiv -DN(z)\Big|_{T_zS} = \mathcal{K}_0 \cdot id_{T_zS}, \quad \forall z \in S. \quad (*)$$

Im Fall $\mathcal{K}_0 = 0$ folgt $N \equiv N_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ auf S, woraus man leicht folgern kann, daß S in einer n-dim. Hyperebene enthalten ist.

Im Fall $|\mathcal{K}_0| > 0$ betrachten wir:

$$\Psi(z) := z + \mathcal{K}_0^{-1} N(z) \quad \text{auf } S \text{ und sehen:}$$

$$(*) \Rightarrow \frac{\partial(\Psi \circ \Phi)}{\partial x^i} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} + \mathcal{K}_0^{-1} DN(\Phi) \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \cancel{\mathcal{K}_0^{-1}} \cancel{\mathcal{K}_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \equiv 0 \quad \underset{i=1,\dots,n}{\text{auf } \mathcal{U}}$$

für eine beliebige Karte $\Phi : \mathcal{U} \xrightarrow{\cong} B_r(z_0) \cap S$ um einen belieb. Punkt $z_0 \in S$.

Wieder folgt: $\Psi \equiv \Psi_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ auf ganz S, also $N(z) = (Y_0 - z) K_0, \quad \forall z \in S.$

Man kann nun schnell schließen, daß dies $S \subset \partial B_r(Y_0)$ mit $r = \frac{1}{|K_0|}$ impliziert. $\square$