§6 Gauß- und Mainardi-Codazzi-Gleichungen

Sei $\Phi : U \rightarrowtail \mathbb{R}^{n+1}$ eine C^3-Parametrisierung einer regulären Hyperfläche $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$, also mit U = Gebiet in $\mathbb{R}^n$, Rang $D\Phi(x) = n$, $\forall x \in U$, $\Phi(U) = S$.

Definition 6.1

Man nennt die Matrise $g_{ij}(x) := I_{\Phi(x)}(\Phi_{x_i}, \Phi_{x_j})$ die Koeffizientenmatrise der ersten Fundamentalform von S in $\Phi(x)$ (bzgl. Φ) und $b_{ij}(x) := II_{\Phi(x)}(\Phi_{x_i}, \Phi_{x_j})$ die Koeffiz. matrise der zweiten Fundamentalform von S in $\Phi(x)$ (bzgl. Φ).

Man nennt (g_{ij}) auch die von Φ induzierte „Metrik" auf S.

Da die Tangentialvektoren $\Phi_{x_1}, \ldots, \Phi_{x_n}$ zusammen mit einer Orientierung $N: S \to S^n$ von S in jedem Punkt $\Phi(x) \in S$ eine Basis des $\mathbb{R}^{n+1}$ liefern, können wir schreiben:

$$\Phi_{x_i x_j}(x) = \left(\Gamma_{ij}^{l}\, \Phi_{x_l}\right)(x) + \left(B_{ij}\, N \circ \Phi\right)(x), \quad \forall x \in U,$$

für gewisse skalare Funktionen Γ_{ij}^{l}, B_{ij} auf U, wobei hier über das „doppelte l" zu summieren ist und $i, j, l \in \{1, \ldots, n\}$.

Man nennt $\Gamma_{ij}^{l}(x)$ die Christoffelsymbole 2. Art. Für die B_{ij} stellt sich sofort heraus:

$$B_{ij}(x) = \langle \Phi_{x_i x_j}, N \circ \Phi \rangle(x)$$

$$= - \langle \Phi_{x_i}, (N \circ \Phi)_{x_j} \rangle(x)$$

$$= - \langle \Phi_{x_i}, (DN \circ \Phi) \cdot \Phi_{x_j} \rangle(x)$$

$$\equiv \langle \Phi_{x_i}, L_{\Phi(x)}(\Phi_{x_j}) \rangle(x) \equiv b_{ij}(x).$$

Desweiteren folgt:

$$\langle \Phi_{x_i x_j}, \Phi_{x_k} \rangle(x) = \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell k}(x) \; \Big(=: \underset{\text{„1. Art"}}{\underbrace{\Gamma_{ikj}}}\Big)$$

und mit $(g_{ij})_{x_k}(x) = \langle \Phi_{x_i x_k}, \Phi_{x_j} \rangle(x)$

$$+ \langle \Phi_{x_i}, \Phi_{x_j x_k} \rangle(x)$$

und der Symmetrie $\Phi_{x_i x_j} = \Phi_{x_j x_i}$

$$\Rightarrow \Gamma_{ij}^{\ell} g_{\ell k}(x) = \frac{1}{2}\big((g_{ik})_{x_i} + (g_{ik})_{x_j} - (g_{ij})_{x_k}\big)(x)$$

Multiplikation von rechts mit der Inversen

$(g^{km}) := (g_{km})^{-1}$ liefert somit:

(Summation über k)

$$\Gamma_{ij}^m \equiv \Gamma_{ij}^l \delta_l^m = \frac{1}{2}\left((g_{jk})_{x_i} + (g_{ik})_{x_j} - (g_{ij})_{x_k}\right) g^{km}$$

für $i, j, m \in \{1, \ldots, n\}$ auf U.

Aus $\Phi_{x_i x_j x_k} = \Phi_{x_i x_k x_j}$, (da $\Phi \in C^3(U, \mathbb{R}^{n+1})$)

für i, j, k fest, erhalten wir $n+1$ Gleichungen:

$$0 \equiv \langle \Phi_{x_i x_j x_k} - \Phi_{x_i x_k x_j}, \Phi_{x_m} \rangle, \quad m = 1, \ldots, n \quad (*)$$

$$0 \equiv \langle \Phi_{x_i x_j x_k} - \Phi_{x_i x_k x_j}, N \circ \Phi \rangle \text{ auf } U. \quad (**)$$

$(*)$ bedeutet anhand der Gleichung $(\Phi_{x_i x_j})$:

$$0 \equiv \left\langle (\Gamma_{ij}^l)_{x_k} \Phi_{x_l} + \Gamma_{ij}^l \Phi_{x_l x_k} + b_{ij} (N \circ \Phi)_{x_k}, \Phi_{x_m} \right\rangle$$

$$- \left\langle (\Gamma_{ik}^l)_{x_j} \Phi_{x_l} + \Gamma_{ik}^l \Phi_{x_l x_j} + b_{ik} (N \circ \Phi)_{x_j}, \Phi_{x_m} \right\rangle$$

$=$

$$= \left(\left(\Gamma_{ij}^{\ell}\right)_{x_k} - \left(\Gamma_{ik}^{\ell}\right)_{x_j} \right) g_{\ell m}$$

$$+ \Gamma_{ij}^{\ell} \left\langle \Phi_{x_\ell x_k}, \Phi_{x_m} \right\rangle - \Gamma_{ik}^{\ell} \overbrace{\left\langle \Phi_{x_\ell x_j}, \Phi_{x_m} \right\rangle}^{= \Gamma_{\ell j}^{a} g_{am}}$$

$$- b_{ij} \underbrace{\left\langle L_{\Phi(x)}\left(\Phi_{x_k}\right), \Phi_{x_m} \right\rangle}_{= b_{km}} + b_{ik} \underbrace{\left\langle L_{\Phi(x)}\left(\Phi_{x_j}\right), \Phi_{x_m} \right\rangle}_{= b_{jm}}$$

Also erhalten wir auf U:

(Summat. über a)

$$b_{ij} b_{km} - b_{ik} b_{jm} =$$

$$= \left(\left(\Gamma_{ij}^{a}\right)_{x_k} - \left(\Gamma_{ik}^{a}\right)_{x_j} + \Gamma_{ij}^{\ell} \Gamma_{\ell k}^{a} - \Gamma_{ik}^{\ell} \Gamma_{\ell j}^{a} \right) g_{am}$$

(Gauß)

$=: R_{imjk} =:$ Riemannscher Krümmungstensor

Man bemerke also, daß diese sogenannten „Gauß-Gleichungen" eine Beziehung zwischen den Koeffizienten (b_{ij}) der 2. Fundam.form und den Koeffizienten g_{ij}

der 1. Fund. form (plus ihren 1. und 2. Ableitungen und den (g^{ij})) herstellen.

Definition 6.2

Man nennt all diejenigen auf U definierten Funktionen (wie z.B $b_{ij}b_{km} - b_{ik}b_{jm} = R_{imjk}$) „intrinsisch" bzw. „Objekte der inneren Geometrie" von $S = \Phi(U)$, falls sie nur von (g_{ij}), (g^{ij}) und deren Ableitungen nach $x_1, \dots, x_n$ (beliebiger Ordn.) abhängen.

Im Spezialfall $n=2$ erhalten wir aus den Gauß-Gleichungen das

Korollar 6.1 (Theorema Egregium)

Die Gaußkrümmung K_S einer 2-dimens.

regulären, orientierbaren C^3-Fläche $S = \Phi(\mathcal{U})$ ist „intrinsisch" und gegeben durch:

$$K_S(\Phi(x)) = R_{1212}(x) \cdot \det(g^{ij})(x), \quad \forall x \in \mathcal{U}.$$

Beweis: Wegen $K_S(\Phi(x)) = \frac{\det(b_{ij})}{\det(g_{ij})}(x)$ erhalten wir aus (Gauß) für $i = 1 = j$, $m = 2 = k$:

$$R_{1212}(x) = (b_{11}\, b_{22} - b_{12}\, b_{12})(x) = K_S(\Phi(x)) \cdot \det(g_{ij})$$

$\square$

Bemerkung zu R_{imjk}:

Aus (Gauß) ergeben sich folgende Symmetrien:

$$R_{imjk} = -R_{imkj} \text{ und } = R_{jkim} = -R_{kjim}$$

Speziell für den Fall $n = 2$:

$$R_{11jk} = 0 = R_{22jk} \text{ und } R_{im11} = 0 = R_{im22}$$

und ansonsten mit Korollar 6.1:

$$R_{1212} = (K_s \circ \Phi) \cdot \det(g_{ij}) = R_{2121}$$

und $= -R_{1221} = -R_{2112}$

Nun untersuchen wir die Gleichung (**):

$$0 \underset{(\Phi_{x_i x_j})}{\equiv} \Gamma_{ij}^{\ell} \langle \Phi_{x_\ell x_k}, N \circ \Phi \rangle + (b_{ij})_{x_k}$$

$$- \Gamma_{ik}^{\ell} \underbrace{\langle \Phi_{x_\ell x_j}, N \circ \Phi \rangle}_{= b_{\ell j}} - (b_{ik})_{x_j}$$

$$= \Gamma_{ij}^{\ell} b_{\ell k} - \Gamma_{ik}^{\ell} b_{\ell j} + (b_{ij})_{x_k} - (b_{ik})_{x_j}.$$

Dies sind die „Mainardi-Codazzi-Gl.", die sich im Spezialfall $n=2$ auf nur die beiden Gleichungen ($j=1$, $k=2$, $i=1,2$)

$$\Gamma_{11}^{\ell} b_{\ell 2} - \Gamma_{12}^{\ell} b_{\ell 1} + (b_{11})_{x_2} - (b_{12})_{x_1} \equiv 0$$

$$\Gamma_{21}^{\ell} b_{\ell 2} - \Gamma_{22}^{\ell} b_{\ell 1} + (b_{21})_{x_2} - (b_{22})_{x_1} \equiv 0$$

reduzieren.

Man nennt die Gauß- und Mainardi-Codazzi-Gleichungen auch die „Kompatibilitätsbedingungen" von S, da diese Gleichungen notwendig für die Existenz einer in den $\mathbb{R}^{n+1}$ eingebetteten, orientierbaren C^3-Untermfk. $S = \Phi(\mathcal{U})$ mit $\text{Metrik}_S(z) = (g_{ij})(x)$ und $(\text{Koeff. der 2. F.F.})_S(z) = (b_{ij})(x)$, für $z = \Phi(x)$, sind, wie wir ja oben herleiteten.

Umgekehrt kann man auch beweisen, daß es zu jedem Paar matrixwertiger Funktionen $g_{ij} \in C^2(\mathcal{U}, \mathrm{Sym}(2, \mathbb{R}))$ und (mit $(g_{ij})(x)$ positiv definit)

$b_{ij} \in C^1(\mathcal{U}, \mathrm{Sym}(2,\mathbb{R}))$, die sowohl die Gauß- als auch die Mainardi-Codazzi-Gleich. auf $\mathcal{U}$ erfüllen, und zu jedem $x \in \mathcal{U}$ eine Umgeb. $\tilde{\mathcal{U}}$ von x und ein $\Phi : \tilde{\mathcal{U}} \rightarrowtail \mathbb{R}^{2+1}$, dessen Koeff. der 1. FF. mit g_{ij} und der 2. FF. mit b_{ij} auf $\tilde{\mathcal{U}}$ übereinstimmen, gibt. (Bonnet)

<u>Beispiel</u>:
Bereits in Aufg. 23 berechneten wir für eine reguläre Abb. $\Phi : \mathcal{U} \rightarrowtail \mathbb{R}^3$, also für eine 2-dim. Fläche $S = \Phi(\mathcal{U})$ im $\mathbb{R}^3$, mit einer speziell einfachen Metrik $g_{ij} = \Lambda\, \delta_{ij}$ vom „konformen Typ", daß: $\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2}(\log\Lambda)_{x_1} = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1$

und $\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2}(\log\Lambda)_{x_2} = \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2$

woraus sich dann

$$R_{1212} = \Lambda\left((\Gamma_{11}^{2})_{x_2} - (\Gamma_{12}^{2})_{x_1} + \Gamma_{11}^{m}\Gamma_{m2}^{2} - \Gamma_{12}^{m}\Gamma_{m1}^{2} \right)$$

$$= -\frac{\Lambda}{2}\Delta(\log\Lambda), \text{ also}$$

$$K_S(\Phi) = -\frac{1}{2\Lambda}\Delta(\log\Lambda)$$ auf U ergab.

Speziell für $\Lambda = \exp(2\varphi)$ erhält man hieraus $-\Delta\varphi = (K_S \circ \Phi)\exp(2\varphi)$, die „Liouville-Gleichung" für φ.