§7) Kovariante Ableitung, parallele Vektorfelder, Geodäten

Sei $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine n-dimensionale, orientierbare C^2-Mannigfaltigkeit mit Normale N, $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ eine C^1-Kurve und $X : (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow[C^1]{} \mathbb{R}^{n+1}$ ein „Tangentialvektorfeld längs α", d.h. mit der Eigenschaft:

$$X(t) \in T_{\alpha(t)} S \quad , \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Definition 7.1

Man nennt die Projektion von $\frac{d}{dt} X(t)$ auf $T_{\alpha(t)} S$, also $\frac{d}{dt} X(t) - \left\langle N(\alpha(t)), \frac{d}{dt} X(t) \right\rangle N(\alpha(t))$, die „kovariante Ableitung" von „X längs α"

und notiert diese mit $\frac{D}{dt}X(t)$, in $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Man rechnet leicht deren folgende Eigenschaften nach:

Satz 7.1

Seien $X, Y : (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow[C^1]{} \mathbb{R}^{n+1}$ zwei Tangentialvektorfelder längs $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \xrightarrow[C^1]{} S$, so gilt:

i) $\frac{D}{dt}(X+Y)(t) = \frac{D}{dt}X(t) + \frac{D}{dt}Y(t)$

ii) $\frac{D}{dt}(fX)(t) = (\dot{f} \cdot X)(t) + (f \cdot \frac{D}{dt}X)(t)$

für $f \in C^1((-\varepsilon, \varepsilon), \mathbb{R})$

iii) $\frac{d}{dt}(\langle X, Y \rangle) = \langle \frac{D}{dt}X, Y \rangle(t) + \langle X, \frac{D}{dt}Y \rangle(t)$.

$\square$

Definition 7.2

X heißt parallel längs α, falls

$\frac{D}{dt} X(t) \equiv 0, \quad \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ gilt.

Satz 7.2

Für zwei parallele Tangent. V-Felder X, Y längs α gelten somit:

i) Reelle Linearkombinationen von X und Y sind wieder parallel längs α.

ii) $\frac{d}{dt} |X(t)|^2 = 2 \cdot \left\langle \frac{D}{dt} X(t), X(t) \right\rangle \equiv 0$,

also $|X(t)| \equiv$ const.

iii*) $\frac{d}{dt} \langle X, Y \rangle = \underbrace{\left\langle \frac{D}{dt} X(t), Y(t) \right\rangle + \left\langle X(t), \frac{D}{dt} Y(t) \right\rangle}_{\equiv 0}$

$\Rightarrow$ Der Winkel $\gamma(t)$ zwischen $X(t)$ und $Y(t)$ bleibt konstant.

$\square$

Satz 7.3

Sei S wie oben und zusätzlich von der Klasse C^3 und $\alpha : [-\varepsilon, \varepsilon] \longrightarrow S$ eine reguläre Kurve der Klasse C^2 mit $\alpha(0) = z \in S$, so gibt es zu jedem $X_0 \in T_z S$ genau ein paralleles Tang. Vekt.-feld $X : [-\varepsilon, \varepsilon] \to \mathbb{R}^{n+1}$ längs α von der Klasse C^2 mit $X(0) = X_0$.

Bew.:

Sei zunächst $\tilde{X}$ ein belieb. Vektorfeld längs α. Es ist $\tilde{X}(t) \in T_{\alpha(t)} S$

$$\Longleftrightarrow \langle \tilde{X}(t), N(\alpha(t)) \rangle \equiv 0$$

$$\overset{\frac{d}{dt}}{\Longrightarrow} \langle N(\alpha(t)), \dot{\tilde{X}}(t) \rangle = -\left\langle \frac{d}{dt} N(\alpha(t)), \tilde{X}(t) \right\rangle.$$

$$\Rightarrow \frac{D}{dt}\tilde{X}(t) = \dot{\tilde{X}}(t) - \langle \dot{\tilde{X}}(t), N(\alpha(t))\rangle N(\alpha(t))$$

$$= \dot{\tilde{X}}(t) + \langle \frac{d}{dt} N(\alpha(t)), \tilde{X}(t)\rangle N(\alpha(t)) \qquad (*)$$

Somit ist ein <u>Tangent.</u> vektorfeld X längs α genau dann parallel auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$, wenn

$$\dot{X} = -\langle \frac{d}{dt}(N \circ \alpha), X\rangle N \circ \alpha \quad \text{auf } [-\varepsilon, \varepsilon]$$

$$(\text{mit } X(0) = X_0) \qquad (AWP)$$

erfüllt ist. Dieses (AWP) besitzt nach dem Satz 1.4 (Picard-Lindelöf) und dem Zornschen Lemma zumindest eine eindeutige C^1-Lösung X auf einem maximalen Existenz-Intervall $(T_-, T_+) \subset [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Wie in den Beweisen von Satz 1.5 und Prop. 4.1 betrachten wir nun eine Folge $\{t_k\}$ mit $t_k \nearrow T_+$

und folgern aus:

$$\left| -\frac{d}{dt} N(\alpha(t)) \right| = \left| L_{\alpha(t)}(\dot\alpha(t)) \right| \leq \text{const.} \quad \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$$

(weil $\alpha([-\varepsilon,\varepsilon])$ kompakt)

und $|X(t)| \equiv \text{const.} = |X_0|$, $\forall t \in (T_-, T_+)$,

(da X $\underbrace{\text{parallel}}_{}$ auf (T_-, T_+) parallel ist und mit Satz 7.2 (ii))

sowie $|N| \equiv 1$ auf S:

$$|X(t_k) - X(t_\ell)| \leq \int_{t_\ell}^{t_k} |\dot X(t)|\, dt$$

$$\underset{(AWP)}{\leq} \text{const.} |X_0| \, |t_k - t_\ell| \,, \quad \forall k \geq \ell \in \mathbb{N}.$$

$\Rightarrow \{X(t_\ell)\}_{\ell \in \mathbb{N}}$ ist Cauchy-Folge im $\mathbb{R}^{n+1}$!

$\underset{(AWP)}{\Longrightarrow}$ X läßt sich als C^1-Lösung von (AWP) in den Randpunkt T_+ hinein fortsetzen. Durch die „Anschweiß-Technik" aus dem Bew. von Satz 1.5 ließe sich also X über den Zeitpunkt T_+ hinaus als C^1 Lösung von (AWP) fortsetzen, $\overbrace{}^{\text{falls } T_+ < \varepsilon}$ im Widerspruch zur Maximalität von T_+!

$\Rightarrow T_+ = \varepsilon$ und analog $T_- = -\varepsilon$

$\Rightarrow$ Es exist. eine eindeut. C^1 Lös. von (AWP) auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$, welche anhand der erfüllten Gleichung zudem $\dot{X} \in C^1([-\varepsilon, \varepsilon], \mathbb{R}^{n+1})$, also $X \in C^2([-\varepsilon, \varepsilon], \mathbb{R}^{n+1})$ erfüllt! ✓

Desweiteren folgt aus (AWP) für X:

$$\frac{d}{dt} \langle N(\alpha(t)), X(t) \rangle = \langle \dot{N}(\alpha(t)), X(t) \rangle + \langle N(\alpha(t)), \dot{X}(t) \rangle$$

$$\underset{(AWP)}{=} \left\langle \frac{d}{dt}(N \circ \alpha), X \right\rangle(t) - \left\langle \frac{d}{dt}(N \circ \alpha), X \right\rangle(t) \equiv 0$$

$$\Rightarrow \langle N \circ \alpha, X \rangle(t) \equiv \langle N(z), \underbrace{X_0}_{\in T_z S} \rangle = 0 \text{ auf } [-\varepsilon, \varepsilon]$$

$\Leftrightarrow \; X(t) \in T_{\alpha(t)}S \;, \; \forall t \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Nun dürfen wir die Identität $(*)$ für unser X benutzen und schließen aus (AWP): $\frac{D}{dt} X \equiv 0$ auf $[-\varepsilon, \varepsilon]$ $\square$

Dieser Satz ermöglicht den folgenden zentralen Begriff der Different. geometrie:

<u>Definition 7.3</u>

Seien zwei Punkte $z_1, z_2 \in S$ (wie in Satz 7.3) beliebig fixiert und durch einen regulären C^2-Weg $\alpha : [0,1] \to S$ verbunden, der also $\alpha(0) = z_1$ und $\alpha(1) = z_2$ erfüllt. Zu einem belieb. $X_0 \in T_{z_1}S$ existiert. nach

Satz 7.3 ein <u>eindeut.</u> paralleles Tangent. vektorfeld $X : [0,1] \xrightarrow[C^2]{} \mathbb{R}^{n+1}$ mit $X(0) = X_0$. Somit können wir die Abbild.

$$P_\alpha : T_{z_1} S \longrightarrow T_{z_2} S \quad \text{durch } P_\alpha(X_0) := X(1)$$
$$X_0 \longmapsto X(1)$$

definieren. Sie heißt „Paralleltransport längs α" von $T_{z_1} S$ nach $T_{z_2} S$.

<u>Satz 7.4</u>

Für belieb. $z_1, z_2 \in S$ und jedes α wie in Def. 7.3 mit $\alpha(0) = z_1$, $\alpha(1) = z_2$ ist P_α ein <u>isometrischer</u> VR-Isomorphismus.
bzgl. $\langle \cdot , \cdot \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$

<u>Bew.:</u>

Seien $X_0, Y_0 \in T_{z_1} S$ beliebig. gegeben und $X, Y : [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$

die eindeut. parallelen Tangent. Vekt. felder längs α mit $X(0)=X_0$, $Y(0)=Y_0$, so folgt aus Satz 7.2(iii): $\langle X(0), Y(0)\rangle = \langle X(1), Y(1)\rangle$

$$\equiv \langle P_\alpha(X_0), P_\alpha(Y_0)\rangle.$$

$\Longleftrightarrow$ P_α ist eine Isometrie von $T_{z_1}S$ nach $T_{z_2}S$,

deren Linearität aus Satz 7.2 (i) und der Eindeutigkeitsaussage in Satz 7.3 folgt:

$$P_\alpha(a X_0 + b Y_0) \equiv (a X + b Y)(1)$$

$$= a X(1) + b Y(1) \equiv a P_\alpha(X_0) + b P_\alpha(Y_0)$$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$

Insbesondere ist somit P_α injektiv.

Zusammen mit der Kern-Bild-Formel aus L.A.

$$\Rightarrow n = \dim T_{z_1}S = \underbrace{\cancel{\dim \ker P_\alpha}}_{\equiv 0} + \dim \operatorname{Bild}(P_\alpha)$$

$$\leq \dim T_{z_2}S = n$$

$\Longrightarrow$ P_α ist auch surjektiv, also ein VR-Isomorph. $\square$

Beispiel:

Sei S die $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ und $\alpha : [0,\pi] \to S^2$ defin. durch $\alpha(t) := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\sin t$, also ein „halber Äquator", der $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ verbindet. Es gilt $\dot\alpha(t) = -\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\sin t + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\cos t$

und $\ddot\alpha(t) = -\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cos t - \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\sin t$

$= -\alpha(t) = \mathrm{Normale}_{S^2}(\alpha(t))$

$\Rightarrow \frac{D}{dt}(\dot\alpha(t)) = \mathrm{Proj.}_{T_{\alpha(t)}S}(\ddot\alpha(t)) \equiv 0, \ \forall t$

$\Leftrightarrow$ Das Vektorfeld $X(t) := \dot\alpha(t)$ längs α ist parallel (und tangential).

Ebenso ist das konstante VF $Y(t) := \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ein paralleles Tangent. VF längs α, und es gilt $T_{\alpha(t)} S^2 = \mathrm{Span}(\dot{\alpha}(t)) \oplus \mathrm{Span}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ (*)

Aus Satz 7.2(i) folgt nun, daß jede Linear-kombination $a\,\dot{\alpha}(t) + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ wieder ein paralleles Tang. VF längs α ist, und aus Satz 7.3 $\underbrace{\text{zudem}}^{\text{und (*)}}$, daß jedes parallele Tangent. VF längs α von der Form

$X = a\,\dot{\alpha} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, für $a, b \in \mathbb{R}$, sein muß.

Sei nun $X_0 = \begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix} = a\,\dot{\alpha}(0) + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \in \underset{(y,z)\text{-Ebene}}{\underset{\shortparallel}{T_1 S^2}}$

$$\Rightarrow P_\alpha(X_0) = X(\pi) = a\,\dot{\alpha}(\pi) + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$= a\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-a\\b\end{pmatrix} \in T_{-1} S^2$$

also $P_\alpha : \underset{(y,z)\text{-Ebene}}{\underset{\shortparallel}{T_1 S^2}} \longrightarrow \underset{(y,z)\text{-Ebene}}{\underset{\shortparallel}{T_{-1} S^2}}, \quad \begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}0\\-a\\b\end{pmatrix}$.

Sei nun $\beta(t) := \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\cos t + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\sin t$, für $t \in [0,\pi]$. Auch β verbindet $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$ auf der S^2, welcher $\frac{D}{dt}(\dot\beta(t)) \equiv 0$, $\forall t$ erfüllt. Nun ist $\tilde{Y}(t) := \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ein zweites paralleles VF längs β, welches

$$T_{\beta(t)} S^2 = \operatorname{Span}(\dot\beta(t)) \oplus \operatorname{Span}(\tilde{Y}(t))$$

$\forall t$ erfüllt.

Für $X_0 = \begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix} \in T_1 S^2$ folgt aber nun:

$$P_\beta\begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix} \equiv X(\pi) = b\,\dot\beta(\pi) + a\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = b\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix} + a\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}0\\a\\-b\end{pmatrix} \in T_{-1} S^2, \text{ also}$$

$P_\beta : T_1 S^2 \longrightarrow T_{-1} S^2$, $\begin{pmatrix}0\\a\\b\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}0\\a\\-b\end{pmatrix}$, und insbes. $P_\alpha \neq P_\beta$!

Definition 7.4

Wir nennen eine C^2-Kurve $\alpha : [a, b] \to S$ in einer n-dimens., orientierbaren Untermannigfaltigkeit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ eine Geodäte, falls

$$\frac{D}{dt}\dot{\alpha}(t) \equiv 0 \text{ , also } \ddot{\alpha}(t) \in T^{\perp}_{\alpha(t)} S,$$

für alle $t \in [a, b]$ erfüllt ist.

Beispiel: a) $S = \mathbb{S}^n$, seien $v_1 \perp v_2 \in \mathbb{S}^n$ beliebig.

Jede Kurve $\alpha(t) := \cos t \cdot v_1 + \sin t \cdot v_2$, die ein Stück eines Großkreises der $\mathbb{S}^n$ parametrisiert, welcher gerade der Durchschnitt $\mathrm{Span}\{v_1, v_2\} \cap \mathbb{S}^n$ ist, ist eine Geodäte in $\mathbb{S}^n$, denn $\ddot{\alpha}(t) = -\cos t\, v_1 - \sin t \cdot v_2 = -\alpha(t) \in T^{\perp}_{\alpha(t)} \mathbb{S}^n$, also $\frac{D}{dt}\dot{\alpha}(t) \equiv 0$.

b) Sei $S :=$ Zylinder $:= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 = 1 \right\}$

Jede „Spiralkurve" $\alpha(t) := (\cos t, \sin t, ct)$, mit $c \in \mathbb{R}$, ist eine Geodäte, denn

$$\ddot{\alpha}(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \in T^{\perp}_{\alpha(t)} S, \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

c) Übungsaufgabe:

Bestimme alle Geodäten auf dem Durchschnitt eines Ellipsoids E mit der (x, y)-Ebene, wobei $E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$.

<u>Bemerkung</u>

Für eine beliebige C^2-Kurve α in einer C^2-Hyperfläche $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit Normalen N gilt:

$$\langle \ddot{\alpha}(t), N(\alpha(t)) \rangle = - \langle \dot{\alpha}(t), \frac{d}{dt} N(\alpha(t)) \rangle,$$

da $\langle \dot{\alpha}(t), N(\alpha(t)) \rangle \equiv 0$ ist.

Somit ist α genau dann eine Geodäte in S, erfüllt also genau dann

$$\ddot{\alpha}(t) = \langle \ddot{\alpha}(t), N(\alpha(t)) \rangle N(\alpha(t)), \text{ wenn}$$

$$\ddot{\alpha}(t) = -\left\langle \dot{\alpha}(t), \frac{d}{dt} N(\alpha(t)) \right\rangle N(\alpha(t)) \quad (*).$$

Mittels dieser Charakterisierung läßt sich mittels der Beweismethoden von Satz 4.1 zeigen:

Satz 7.5

Zu jedem Punkt z aus einer n-dim., orientierbaren C^2-Untermannigfalt.keit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ und jedem $v_0 \in T_z S$ existiert genau eine maximale Lösung α der Differentialgleich. $(*)$ mit $\alpha(0) = z$ und $\dot{\alpha}(0) = v_0$, d.h. ein nicht erweiterbares Intervall $(T_-, T_+) (\ni 0)$, sodaß $\alpha : (T_-, T_+) \to S$ die <u>eindeutige Geodäte</u> in S mit $\alpha(0) = z$ und $\dot{\alpha}(0) = V_0$ ist. $\square$

<u>Definition 7.5</u>

Wir nennen S „geodätisch vollständig", falls für jede maximale Geodäte $\alpha : (T_-, T_+) \to S$ sogar $(T_-, T_+) = \mathbb{R}$ gilt.

Wiederum kann man die charakterisierende Differ. gleichung $(*)$ mit den bereits bekannten Beweismethoden aus Proposition 4.1 kombinieren, um zu beweisen:

Satz 7.6

Jede kompakte, orientierbare C^2-Hyperfläche im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist geodätisch vollständig. $\square$

Sei nun $X : S \to \mathbb{R}^{n+1}$ ein beliebiges C^1-Tangentialvektorfeld auf einer C^2-Umfk. S.

Definition 7.6

Wir definieren die „kovariante Ableitung" von X in Richtung eines Vektors $Y \in \mathbb{R}^{n+1}$, in einem Punkt $z_0 \in S$ durch

$$\nabla_Y X(z_0) := \frac{D}{dt}(X \circ \alpha)(0), \text{ wobei}$$

$\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ ein regulärer C^1-Weg mit $\alpha(0) = z_0$ und $\dot\alpha(0) = Y$ sei.

Warum ist diese Definition von der Wahl des Weges α unabhängig?

Wählen wir hierzu ein $r>0$, sodaß $S \cap B_r(z_0)$ durch eine Einbettung $\Phi : U \xrightarrow{\cong} S \cap B_r(z_0)$ über einer offenen Menge $U \subset \mathbb{R}^n$ dargestellt werden kann. Somit existieren eindeutige Koordinaten-Funktionen $V_1, \ldots, V_n \in C^1(U)$ und ein Weg $\gamma \in C^1((-\varepsilon,\varepsilon), U)$, sodaß

$$\mathbb{X}(\Phi(x)) = \sum_{i=1}^{n} V_i(x)\, \Phi_{x^i}(x) \equiv D\Phi(x) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix}(x)}_{=: V(x)}$$

$$\forall x \in U$$

und $\alpha(t) = (\Phi \circ \gamma)(t)$, $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$.

Also insbes.: $\mathbb{X} \circ \alpha = D\Phi(\gamma) \cdot V(\gamma)$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(\mathbb{X} \circ \alpha) = \sum_{j,i=1}^{n} \frac{\partial V_i(\gamma)}{\partial x^j} \dot{\gamma}^j\, \Phi_{x^i}(\gamma) + V_i(\gamma) \dot{\gamma}^j\, \Phi_{x^i x^j}$$

Setzen wir hier $\Phi_{x^i x^j} = \Gamma_{ij}^k \Phi_{x^k} + b_{ij} N$ ein und berücksichtigen wir nur die Tangentialkomponente

$$\Rightarrow \frac{D}{dt}(X \circ \alpha) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j}(\gamma) + v_i(\gamma) \Gamma_{ij}^k(\gamma) \right) \dot{\gamma}^j \, \Phi_{x^k}(\gamma)$$

$$(\nabla_Y X)$$

$$\Rightarrow \nabla_Y X(z_0) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j}(x_0) + v_i(x_0) \Gamma_{ij}^k(x_0) \right) \cdot w^j \, \Phi_{x^k}(x_0)$$

wenn wir noch $x_0 = \Phi^{-1}(z_0)$ und $w := (D\Phi(x_0))^{-1}(Y)$ setzen, sodaß $\gamma(0) = x_0$ und $\dot{\gamma}(0) = w$ gelten.

An diesem Ausdruck erkennen wir, daß $\nabla_Y X(z_0)$ tatsächlich nur von X und Y, nicht aber von α, und von der ersten F. Form (g_{ij}) der Einbettung Φ abhängt!

Die kovariante Ableitung von X in Richtung eines $Y_{z_0} \in \mathbb{R}^{n+1}$ in z_0 ist also ein wohl-definierter Vektor aus $T_{z_0}S$, welcher zudem ein „intrinsisches Objekt" ist:

$$\nabla : \{C^1\text{-Tang.-VF}\} \times \{C^0\text{-VF auf } S\} \longrightarrow \{C^0\text{-Tang.-VF}\}$$
$$(\quad X \quad , \quad Y \quad) \longmapsto \nabla_Y X .$$

<u>Satz 7.7</u>

Seien $X_{1,2}$ zwei C^1-Tang.-VFelder, Y ein beliebiges C^0-VFeld auf einer C^2-Untermannigfalt.keit $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ der Dim. n und $f \in C^1(S, \mathbb{R})$. „∇" hat die Eigenschaften:

i) $\nabla_Y(X_1 + X_2)(z) = (\nabla_Y X_1 + \nabla_Y X_2)(z)$

ii) $\nabla_Y(f \cdot X)(z) = \frac{\partial f}{\partial Y}(z) \cdot X(z) + (f \cdot \nabla_Y X)(z)$

iii) $\nabla_{(fY)} X(z) = (f \cdot \nabla_Y X)(z)$

<u>Bew.</u>: i) folgt sofort aus der Def. von „∇".

ii) $$\nabla_Y (f X)(z) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\frac{\partial (f \circ \Phi \cdot v_k)}{\partial x^j}(x) + (f \circ \Phi \cdot v_i)(x) \Gamma_{ij}^k (x) \right) w^j \Phi_{x^k}(x)$$

$$= \sum_{i,j,k=1}^{n} \left[\frac{\partial (f \circ \Phi)}{\partial x^j} \cdot w^j \cdot v_k \Phi_{x^k}(x) + f \circ \Phi(x) \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j}(x) + (v_i \Gamma_{ij}^k)(x) \right) w^j \Phi_{x^k}(x) \right]$$

$$\underset{D\Phi(x) \cdot w = Y}{=} \langle \nabla f, Y \rangle (z) \cdot X(z) + f(z) \cdot \nabla_Y X(z)$$ ✓

iii) $$\nabla_{(fY)} X(z) = \sum_{i,j,k=1}^{n} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^j}(x) + v_i \Gamma_{ij}^k (x) \right) f \circ \Phi \, w^j \Phi_{x^k}(x)$$

$$= f(z) \, \nabla_Y X(z)$$ □