Inhaltsverzeichnis

§8 von Differentialgeometrie I

Ruben Jakob

24. Dezember 2009

Kapitel 1

Geodäten und die Exponentialabbildung

In diesem Paragraphen sei S eine n-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ der Klasse C^k, für zunächst beliebiges $k \geq 3$ und $n \geq 2$. Wir fixieren einen Punkt $z_0 \in S$ und wählen ein $r > 0$ derart klein, dass wir $S \cap B_r(z_0) =: U$ mittels einer C^k-Einbettung $\Phi : \Omega \xrightarrow{\cong} U$ über einer offenen Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ darstellen können. Anwendung des ,,Tangential-Funktors" T auf Φ^{-1} liefert einen Bündel-Isomorphismus

$$T(\Phi^{-1}) : T(U) \xrightarrow{\cong} T(\Omega) = \Omega \times \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

von $T(U) := \{(z, v) \mid z \in U, v \in T_zS\}$ auf $T(\Omega) = \{x = \Phi^{-1}(z), w = (D\Phi(x))^{-1}(v)\}$, welcher also bereits durch $T(\Phi)(x, e_i) = (\Phi(x), \Phi_{x^i}(x))$, $i = 1, \ldots, n$, eindeutig beschrieben wird. $T(\Phi^{-1})$ trivialisiert oder plättet $T(U)$ zum kartesischen Produkt $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Einem Tangentialvektorfeld $(\alpha, X) : I \longrightarrow T(U)$ entlang einer C^2-Kurve α in U entspricht über $T(\Phi^{-1})$ genau ein Tangentialvektorfeld $(\gamma, w) : I \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R}^n$ längs γ, nämlich durch $\alpha = \Phi \circ \gamma$ und $X(t) = D\Phi(\gamma(t)) \cdot w(t) = \sum_{i=1}^n w^i(t)\Phi_{x^i}(\gamma(t))$. Leiten wir dies nach t ab, so erhalten wir:

$$\frac{d}{dt}X(t) = \sum_{i,j=1}^n \dot{w}^i(t)\, \Phi_{x^i}(\gamma(t)) + w^i(t)\, \Phi_{x^i x^j}(\gamma(t))\, \dot{\gamma}^j(t),$$

dessen ,,Tangential-Komponente" gerade die kovariante Ableitung

$$\frac{D}{dt}X(t) = \sum_{i,j,k=1}^n (\dot{w}^k(t) + w^i(t)\, \dot{\gamma}^j(t)\, \Gamma_{ij}^k(\gamma(t)))\, \Phi_{x^k}(\gamma(t)) \tag{1.2}$$

ist. Wählen wir in dieser Formel das spezielle Tangentialvektorfeld $(\alpha, X)(t) = (\alpha, \dot{\alpha})(t)$, so erhalten wir das

Theorem 1.0.1 (Satz 8.1) *Eine C^2-Kurve $\alpha : I \longrightarrow U$ ist genau dann eine Geodäte in U, falls das über $T(\Phi^{-1})$ korrespondierende Tangentialvektorfeld $(\gamma, \dot{\gamma}) : I \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R}^n$ längs $\gamma := \Phi^{-1}(\alpha)$ das folgende System ,,(Geo)" aus n Differentialgleichungen*

$$\ddot{\gamma}^k(t) + \dot{\gamma}^i(t)\, \dot{\gamma}^j(t)\Gamma_{ij}^k(\gamma(t)) \equiv 0 \qquad \text{auf} \quad I, \tag{1.3}$$

für $k = 1, \ldots, n$, löst. (Man beachte hierbei die übliche ,,Summationskonvention", über doppelt auftretende Indizes – hier i, j– zu summieren.)

Bemerkung 1.0.1 *Anhand von $\Gamma_{ij}^k \in C^{k-2}(\Omega)$ entnimmt man dem System ,,(Geo)", dass jede seiner C^2-Lösungen $\gamma : I \longrightarrow \Omega$ und somit jede Geodäte $\alpha = \Phi(\gamma) : I \longrightarrow U \subset S$ bereits von der Klasse $C^k(I)$ ist. Es gilt somit die ,,Faustregel":*
Geodäten auf einer Hyperfläche S sind grundsätzlich so glatt wie S selbst !

Der Satz von Picard-Lindelöf garantiert uns, dass es zu jedem Startwert (x, w) aus $\Omega \times \mathbb{R}^n$ genau eine ,,maximale Lösung" $(\gamma, \dot\gamma)$ von (1.3) mit $(\gamma(0), \dot\gamma(0)) = (x, w)$ auf einem nicht erweiterbaren Existenz-Intervall $(T_-, T_+)_{(x,w)} \subset I$ gibt. Somit existiert also zu jedem Paar (z, v) aus $T(U)$ genau eine (nicht weiter fortsetzbare) Geodäte $\alpha = \Phi(\gamma)$ mit $(\alpha(0), \dot\alpha(0)) = (z = \Phi(x), v = D\Phi(x) \cdot w)$ auf $(T_-, T_+)_{(x,w)}$. Die obige Bemerkung garantiert uns, dass diese ,,maximale Lösung" γ und die korrespondierende Geodäte $\alpha = \Phi(\gamma)$ (als Funktionen von t) von der Klasse $C^k((T_-, T_+)_{(x,w)})$ sind. Wie steht es jedoch um die Abhängigkeit von γ bzw. $\alpha = \Phi(\gamma)$ von ihren Startwerten (x, w) bzw. (z, v) ? Eine recht tiefliegende Erweiterung des Satzes von Picard-Lindelöf (siehe hierzu Analysis II, S. 160, von S. Hildebrandt) besagt, dass die Lösungen $(\gamma, \dot\gamma)$ von (1.3) auf C^{k-2}-Weise von den Anfangswerten (x, w) abhängen, was präzise bedeutet, dass es hinreichend kleine Umgebungen $B_{\epsilon_1}(x_0)$ von $x_0 := \Phi^{-1}(z_0)$ in Ω und $B_{\epsilon_2}(0)$ von 0 in $\mathbb{R}^n$ und ein nicht-leeres offenes Intervall $(T_-^*, T_+^*) \subset \bigcap_{(x,w)\in B_{\epsilon_1}(x_0)\times B_{\epsilon_2}(0)} (T_-, T_+)_{(x,w)}$ gibt, auf deren Produkt eine C^{k-2}-Funktion

$$\Gamma : (T_-^*, T_+^*) \times B_{\epsilon_1}(x_0) \times B_{\epsilon_2}(0) \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R}^n$$

mit der Eigenschaft existiert, dass $\Gamma(\cdot, x, w)$ die Einschränkung der eindeutigen, maximalen Lösung $(\gamma, \dot\gamma)$ des Systems (1.3) mit $\Gamma(0, x, w) = (\gamma(0), \dot\gamma(0)) = (x, w)$ auf das Intervall (T_-^*, T_+^*) ist. Bezeichnen wir also mit $V_{\Phi(x)}$ die Umgebung $D\Phi(x)(B_{\epsilon_2}(0))$ von 0 in $T_{\Phi(x)}S$ und mit U_{z_0} die Umgebung $\Phi(B_{\epsilon_1}(x_0))$ von z_0 in S, so erhalten wir aus Γ mittels $T\Phi$ die folgende C^{k-2}-Funktion (die ,,Mutter aller Geodäten"):

$$\mathcal{A} : (T_-^*, T_+^*) \times \{(z, v) \mid z \in U_{z_0}, v \in V_z\} \longrightarrow T(U) \subset TS,$$

welche also (mit den Aufspaltungen $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2)$ und $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ im jeweiligen Tangentialbündel) konkret durch

$$\mathcal{A}_1(t, z, v) = \Phi(\Gamma_1(t, \Phi^{-1}(z), (D\Phi(\Phi^{-1}(z)))^{-1}(v))),$$
$$\mathcal{A}_2(t, z, v) = D\Phi(\Gamma_1) \cdot \Gamma_2(t, \Phi^{-1}(z), (D\Phi(\Phi^{-1}(z)))^{-1}(v))$$

gegeben ist, sodass sich also gerade $\mathcal{A}(\cdot, z, v) = (\alpha(\cdot, z, v), \dot\alpha(\cdot, z, v))$ für die maximale Geodäte $\alpha(\cdot, z, v)$ in $U \subset S$ mit dem Startwert (z, v), eingeschränkt auf das Intervall (T_-^*, T_+^*), herausstellt. Halten wir also im folgenden Theorem fest:

Theorem 1.0.2 *Zu jedem Punkt z_0 einer Hyperfläche S des $\mathbb{R}^{n+1}$ von der Klasse C^k gibt es ein offenes Intervall (T_-^*, T_+^*) (um 0) und eine offene Umgebung $\mathcal{U} := \{(z, v) \mid z \in U_{z_0}, v \in V_z\}$ des Punktes $(z_0, 0)$ im Tangentialbündel TS, sodass die Geodäten $\alpha(\cdot, z, v)$ mit Startwert $(z, v) \in \mathcal{U}$ in C^{k-2}-Weise von diesen beiden Anfangswerten, also sowohl von deren Ausgangspunkt z als auch von* *deren Anfangsgeschwindigkeitsvektor v, abhängen und mindestens auf dem Intervall (T_-^*, T_+^*) definiert sind. Insbesondere existiert somit eine Umgebung V_{z_0} der $0 \in T_{z_0}S$, sodass die Geodäten $\alpha(\cdot, z_0, v)$ mit Ausgangspunkt z_0 in C^{k-2}-Weise von deren Anfangsgeschwindigkeitsvektor $v \in V_{z_0}$ abhängen.*

Für jede solche Geodäte $\alpha(\cdot, z, v)$ gilt desweiteren die folgende einfache, aber nützliche

Proposition 1.0.1 (Proposition 8.2) *Sei $\lambda \geq 0$ beliebig fixiert. Es gilt*

$$\alpha(t, z, \lambda v) = \alpha(\lambda t, z, v),$$

falls entweder $\lambda t \in (T_-, T_+)_v$ und $v \in V_z$ oder $\lambda v \in V_z$ und $t \in (T_-, T_+)_{\lambda v}$. Insbesondere folgt hieraus $\alpha(T_+^*, z, \frac{v}{T_+^*}) = \alpha(1, z, v)$, falls $\frac{v}{T_+^*} \in V_z$ erfüllt ist.

Beweis: Wir haben einerseits $\frac{D}{dt}\dot{\alpha}(\cdot, z, \lambda v) \equiv 0$ und andererseits $\frac{D}{dt}\dot{\alpha}(\lambda\cdot, z, v) \equiv 0$. Ausserdem gelten $\alpha(0, z, \lambda v) = z = \alpha(\lambda 0, z, v)$, $\dot{\alpha}(0, z, \lambda v) = \lambda v$ und $\frac{d}{dt}\alpha(\lambda t, z, v) \mid_{t=0} = \lambda\dot{\alpha}(0, z, v) = \lambda v$. Anhand der Eindeutigkeit einer Geodäten auf S mit den Startwerten $(z, \lambda v)$ nach Satz 7.5 folgt also die Übereinstimmung $\alpha(t, z, \lambda v) = \alpha(\lambda t, z, v)$, $\forall t \in (T_-, T_+)_{\lambda v}$ falls $\lambda v \in V_z$, oder $\forall \lambda t \in (T_-, T_+)_v$ falls $v \in V_z$ gilt.

$\diamond$

Bezeichnen wir also mit $\tilde{V}_z$ die „geschrumpfte" Umgebung $T_+^* V_z \equiv \{T_+^* v \mid v \in V_z\}$ von $0 \in T_z S$, so können wir anhand obiger Proposition definieren:

Definition 1.0.1 (Exponentialabbildung) *Zu jedem Punkt $z \in U_{z_0} \subset S$ definieren wir die sogenannte „Exponentialabbildung" $\exp_z : \tilde{V}_z \longrightarrow S$ durch die Vorschrift $\exp_z(v) := \alpha(1, z, v)$.*

Nun sehen wir, dass per dieser Definition $\exp_z(0) = z$ und anhand von Theorem 1.0.2 $\exp_z \in C^{k-2}(\tilde{V}_z, S)$ ist, für jedes $z \in U_{z_0}$, wobei $\tilde{V}_z$ eine offene Umgebung der 0 in $T_z S$ ist. Man definiert weiterhin den sogenannten „Domain($\exp_z$)"$=: \mathcal{D}_z$ als die maximale offene Umgebung der 0 in $T_z S$, auf der $\exp_z(v)$ noch durch $\alpha(1, z, v)$ wohldefiniert werden kann, sodass also für jedes $v \in \mathcal{D}_z$ die Geodäte $\alpha(t, z, v)$ mindestens bis zum Zeitpunkt $t = 1$ noch existiert. Aus Prop. 1.0.1 folgt sofort, dass $\mathcal{D}_z$ eine sternförmige Teilmenge von $T_z S$ mit Sternpunkt 0 sein muss. Nun wäre es natürlich wünschenswert, wenn auch das Bild $\exp_z(\tilde{V}_z)$ eine Umgebung des Punktes $z \in S$ wäre, was man insbesondere damit garantieren könnte, indem man die Existenz einer (vielleicht noch viel kleineren) offenen Umgebung $V_z^* \subset \tilde{V}_z$ von $0 \in T_z S$ beweisen könnte, die von $\exp_z$ *diffeomorph* auf $\exp_z(V_z^*)$ abgebildet würde. Hierzu benötigen wir eine präzise Definition dieses Begriffs für Abbildungen zwischen Hyperflächen:

Definition 1.0.2 *Seien S_1 und S_2 zwei beliebige C^k-Hyperflächen des $\mathbb{R}^{n+1}$ und $\Phi_1 : \Omega_1 \xrightarrow{\cong} \Phi_1(\Omega_1) \subset S_1$ bzw. $\Phi_2 : \Omega_2 \xrightarrow{\cong} \Phi(\Omega_2) \subset S_2$ zwei Kartenabbildungen. Wir nennen eine Abbildung $\Psi : \Phi_1(\Omega_1) \longrightarrow \Phi_2(\Omega_2)$ von der Klasse C^k, falls die Komposition $(\Phi_2)^{-1} \circ \Psi \circ \Phi_1 : \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ von der Klasse C^k ist, und ausserdem einen C^k-Diffeomorphismus von $U_1 := \Phi_1(\Omega_1)$ auf $\Psi(U_1)$, falls sie zusätzlich bijektiv und ihre Inverse Ψ^{-1} ebenfalls von der Klasse C^k ist. Desweiteren bezeichnen wir eine bijektive Abbildung Ψ von S_1 auf S_2 als einen*

C^k-Diffeomorphismus zwischen S_1 und S_2, falls jeder Punkt $z \in S_1$ eine offene Umgebung U_1 besitzt, sodass $\Psi \mid_{U_1}$ ein C^k-Diffeomorphismus von U_1 auf $\Psi(U_1)$ im obigen Sinne ist. In diesem Fall ist also Ψ ein Homöomorphismus von S_1 auf S_2 mit Inversem Ψ^{-1} von der Klasse C^k.

Nun gilt das folgende bemerkenswerte

Theorem 1.0.3 (Satz 8.3) *Jeder Punkt $z_0 \in S$ besitzt eine Umgebung $W_{z_0} \subset U_{z_0}$ in S, sodass $\exp_z$ einen Ball $B_{r_0}(0) \subset \tilde{V}_z \subset T_zS$ C^{k-2}-diffeomorph auf sein Bild $\exp_z(B_{r_0}(0))$ in S abbildet und sodass sogar W_{z_0} noch in $\exp_z(B_{r_0}(0))$ für jedes $z \in W_{z_0}$ enthalten ist.*

Beweis: Wir definieren die Abbildung

$$\phi : \{(z, v) \mid z \in U_{z_0}, v \in \tilde{V}_z\} \subset TS \longrightarrow U_{z_0} \times S$$

durch $\phi(z, v) := (z, \exp_z(v))$ und versuchen nun die Isomorphie ihres totalen Differentials

$$D\phi(z_0, 0) : T_{(z_0,0)}(TS) = T_{z_0}S \times T_{z_0}S \longrightarrow T_{(z_0,z_0)}(U_{z_0} \times S) = T_{z_0}S \times T_{z_0}S$$

an der Stelle $(z_0, 0)$ zu beweisen. Dazu wählen wir einen beliebigen Vektor $v \in T_0(T_{z_0}S) = T_{z_0}S$ und erhalten aus der Kettenregel, der Definition von ϕ und Prop. 1.0.1:

$$D\phi(z_0, 0)\cdot(0, v) = \frac{d}{dt}\phi(z_0, tv) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt}(z_0, \exp_{z_0}(tv)) \mid_{t=0} = (0, \dot{\alpha}(0, z_0, v)) = (0, v).$$

Ist nun weiterhin $(\beta(t), 0)$ eine beliebige C^1-Kurve in $S \times \{0\} \subset TS$ durch den Punkt $(z_0, 0)$, so erhalten wir auf ähnliche Weise:

$$D\phi(z_0, 0) \cdot (\dot{\beta}(0), 0) = \frac{d}{dt}\phi(\beta(t), 0) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt}(\beta(t), \exp_{\beta(t)}(0)) \mid_{t=0} = (\dot{\beta}(0), \dot{\beta}(0)).$$

$D\phi(z_0, 0)$ bildet also insbesondere eine Basis von $T_{(z_0,0)}(TS) = T_{z_0}S \times T_{z_0}S$ wieder auf solch eine (von $T_{(z_0,z_0)}(U_{z_0} \times S) = T_{z_0}S \times T_{z_0}S$) ab und ist somit ein Isomorphismus. Aus dem Umkehrsatz folgt damit die Existenz einer Umgebung $\mathcal{W}_{(z_0,0)}$ von $(z_0, 0)$ in TS, welche von ϕ C^{k-2}-diffeomorph auf eine Umgebung $\Omega_{(z_0,z_0)} := \phi(\mathcal{W}_{(z_0,0)})$ von (z_0, z_0) in $U_{z_0} \times S$ abgebildet wird. Da wir das Tangentialbündel TS um z_0 mittels $T(\Phi^{-1}) : T(U) \xrightarrow{\cong} T(\Omega) = \Omega \times \mathbb{R}^n$ wie in (1.1) lokal trivialisieren können, darf $\mathcal{W}_{(z_0,0)}$ von der Form $\{(z, v) \mid z \in \tilde{U}_{z_0}, v \in B_{r_0}(0) \subset T_zS\}$, für eine hinreichend kleine Umgebung $\tilde{U}_{z_0} \subset U_{z_0}$ von z_0 in S und ein von $z \in \tilde{U}_{z_0}$ unabhängiges $r_0 > 0$, gewählt werden. Da weiterhin $\Omega_{(z_0,z_0)}$ eine Umgebung von (z_0, z_0) in $U_{z_0} \times S$ ist, können wir eine Umgebung W_{z_0} von z_0 in $\tilde{U}_{z_0}$ hinreichend klein mit der Eigenschaft $W_{z_0} \times W_{z_0} \subset \Omega_{(z_0,z_0)}$ wählen, sodass wir anhand der Definitionen von $\Omega_{(z_0,z_0)}$ und ϕ und der Gestalt von $\mathcal{W}_{(z_0,0)}$ sehen:

$$\coprod_{z \in W_{z_0}} \{z\} \times W_{z_0} \equiv W_{z_0} \times W_{z_0} \subset \phi(\mathcal{W}_{(z_0,0)}) = \{\phi(z, v) \mid z \in \tilde{U}_{z_0}, v \in B_{r_0}(0)\}$$

$$= \{(z, \exp_z(v)) \mid z \in \tilde{U}_{z_0}, v \in B_{r_0}(0)\} \equiv \coprod_{z \in \tilde{U}_{z_0}} \{z\} \times \exp_z(B_{r_0}(0)).$$

Somit erhalten wir also $W_{z_0} \subset \exp_z(B_{r_0}(0))$, zumindest für alle $z \in W_{z_0}$, wie behauptet. Ausserdem müssen die Einschränkungen $\phi\mid_{\{z\}\times B_{r_0}(0)}$: $\{z\} \times B_{r_0}(0) \longrightarrow \{z\} \times \exp_z(B_{r_0}(0))$ (man beachte wieder die Definition von ϕ) des C^{k-2}-Diffeomorphismus' $\phi : \mathcal{W}_{(z_0,0)} \equiv \coprod_{z\in\tilde{U}_{z_0}}\{z\} \times B_{r_0}(0) \xrightarrow{\cong} \Omega_{(z_0,z_0)}$ wieder C^{k-2}-Diffeomorphismen sein, sodass also – insbesondere für jedes $z \in W_{z_0}$ – $\exp_z$ den Ball $B_{r_0}(0)$ C^{k-2}-diffeomorph auf $\exp_z(B_{r_0}(0))$ abbildet.

$\diamond$

Definition 1.0.3 *Wir nennen eine Umgebung U eines Punktes z_0 einer Hyperfläche S (des $\mathbb{R}^{n+1}$) von der Klasse C^k eine ,,Normalumgebung" von z_0, falls U das C^{k-2}-diffeomorphe Bild einer Umgebung V der $0 \in T_{z_0}S$ unter $\exp_{z_0}$ ist.*

Theorem 1.0.3 besagt also, dass jedes $z_0 \in S$ eine Umgebung W_{z_0} in S besitzt, welche Normalumgebung aller Punkte $z \in W_{z_0}$ und sogar in $\exp_z(B_{r_0}(0))$, simultan für alle $z \in W_{z_0}$ und ein festes $r_0 > 0$, enthalten ist !

Wählen wir nun eine ON-Basis $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ von $T_{z_0}S$ (ausgestattet mit der Einschränkung des euklidischen Skalarproduktes $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$), so können wir jeden Punkt z einer Normalumgebung U eines fixierten Punktes $z_0 \in S$ in der Form $z = \exp_{z_0}(z_1\bar{v}_1 + \ldots + z_n\bar{v}_n)$ für einen durch z eindeutig bestimmten Satz an Koordinaten $(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n$, den sogenannten ,,Normalkoordinaten" von z, darstellen. In einer Übungsaufgabe wurden folgende einfache Eigenschaften der Exponentialabbildung zusammengetragen:

Theorem 1.0.4 (Satz 8.4) *Sei $z \in S$ beliebig gewählt und $\{\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n\}$ eine ON-Basis von T_zS. So gelten:*
i) $D(\exp_z)(0) \cdot v = v$, $\forall\, v \in T_zS$, und somit für die Matrix $M(D(\exp_z)(0))$ der linearen Abbildung $D(\exp_z)(0) : T_zS \longrightarrow T_zS$ bzgl. der gewählten ON-Basis von T_zS: $M(D(\exp_z)(0)) = (\delta_{ij})$,
ii) $(g_{ij}(0)) = M(D(\exp_z)(0))^T \cdot M(D(\exp_z)(0)) = (\delta_{ij})$, für die Koeffizienten $g_{ij}(0)$ der ersten Fundamentalform des lokalen Diffeomorphismus' $\exp_z$ in $v = 0 \in T_zS$,
iii) und schliesslich $\Gamma^k_{ij}(0) = 0$ für die Christoffel-Symbole 2.Art von $\exp_z$ in $v = 0 \in T_zS$.

Desweiteren wird es sich für die Untersuchung 2-dimensionaler Hyperflächen S des $\mathbb{R}^3$ und insbesondere für den Beweis des Satzes von Gauss-Bonnet als äusserst günstig erweisen, die Punkte z einer punktierten Normalumgebung $U\setminus\{z_0\}$ eines Punktes $z_0 \in S$ mittels sogenannter ,,geodätischer Polarkoordinaten" (r, θ) darzustellen, welche jedem $z \in U\setminus\{z_0\}$ mittels $z = \exp_{z_0}(r(\cos(\theta)\, X + \sin(\theta)\, Y))$ nach Wahl einer ON-Basis $\{X, Y\}$ von $(T_{z_0}S, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3})$ eindeutig zugeordnet werden können. Der Grund für deren behauptete Nützlichkeit liegt in

Theorem 1.0.5 (Satz 8.5) *Seien S eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ der Klasse C^7, $z_0 \in S$ beliebig fixiert, $U := \exp_{z_0}(B_{r_0}(0))$ eine Normalumgebung von z_0 in S, wobei $r_0 > 0$ wie in Theorem 1.0.3 gewählt werden kann, $\{X, Y\}$ eine ON-Basis von $(T_{z_0}S, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3})$ und*

$$\Phi : (0, r_0) \times [0, 2\pi) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Bild}(\Phi) = U \setminus \{z_0\}$$

die ,,geodätische Exponential-Parametrisierung", gegeben durch $\Phi(r,\theta) := \exp_{z_0}(r\,(\cos(\theta)\,X + \sin(\theta)\,Y))$ (welche also ein C^5-Diffeomorphismus ist). So gilt für die Koeffizienten $g_{ij}(r,\theta)$ der ersten Fundamentalform von Φ: $g_{11} \equiv 1$, $g_{12} \equiv 0 \equiv g_{21}$ und $g_{22} = \lambda^2$, wobei die Funktion $\lambda :=\mid \frac{\partial}{\partial\theta}\Phi \mid\in C^4((0,r_0)\times[0,2\pi))$ in $r=0$ hinein zu einer Funktion aus $C^3([0,r_0)\times[0,2\pi))$ eindeutig fortgesetzt werden kann, der Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\lambda(r,\theta) + K_S(\Phi(r,\theta))\,\lambda(r,\theta) \equiv 0 \qquad \text{auf } [0,r_0)\times[0,2\pi) \tag{1.4}$$

genügt und die asymptotische Taylorentwicklung bis zur 3.Ordnung

$$\lambda(r,\theta) = r - \frac{K_S(z_0)}{6}\,r^3 + O(r^4) \qquad \text{für } r \searrow 0 \tag{1.5}$$

und jedes $\theta\in[0,2\pi)$ besitzt. Schliesslich gilt $\Gamma^k_{11}\equiv 0$ auf $[0,r_0)\times[0,2\pi)$, $k=1,2$, für die Christoffel-Symbole 2.Art von Φ.

Beweis: Aufgrund der Voraussetzung ,,$S\in C^7$" und der Wahl von $r_0>0$ wissen wir aus Theorem 1.0.3, dass $\exp_{z_0}$ auf $B_{r_0}(0)$ ein C^5-Diffeomorphismus ist und somit insbesondere

$$\lambda(r,\theta) :=\mid \frac{\partial}{\partial\theta}\Phi(r,\theta)\mid \equiv\mid \frac{\partial}{\partial\theta}\exp_{z_0}(r\,(\cos(\theta)\,X+\sin(\theta)\,Y))\mid\in C^4((0,r_0)\times[0,2\pi)).$$

Der Einfachheit halber und ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir nun an, dass $(T_{z_0}S,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3})$ mit dem $(\mathbb{R}^2,\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^2})$ zusammenfällt, und wählen dessen Standard-ON-Basis $X:=(1,0)$, $Y:=(0,1)$, sodass wir einfach mit

$$\Phi(r,\theta) = \exp_{z_0}\Big(r\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\Big) \equiv \alpha\Big(r,z_0,\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\Big) \tag{1.6}$$

rechnen werden. Zunächst erhalten wir sofort aus Proposition 1.0.1 und der Konstanz der Geschwindigkeit einer jeden Geodäten auf S:

$$g_{11}(r,\theta) \equiv \langle\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r,\theta),\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r,\theta)\rangle =\mid \dot\alpha\Big(r,z_0,\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\Big)\mid^2 =\mid \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\mid^2 = 1,$$

für beliebige $(r,\theta)\in(0,r_0)\times[0,2\pi)$, wie erwünscht. Anhand von (1.6) und Proposition 1.0.1 bildet Φ die Gerade $\gamma(t):=(tr,\theta)$ exakt auf die Geodäte $\alpha\Big(t,z_0,r\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\Big)$, für $t\in[0,1]$, ab, sodass γ das System (1.3), für $k=1,2$, auf $[0,1]$ löst. Da nun simplerweise $\dot\gamma(t) = (\dot\gamma^1,\dot\gamma^2)(t)\equiv(r,0)$ gilt, folgern wir $r^2\,\Gamma^k_{11}(\gamma(t))\equiv 0$ auf $[0,1]$ aus (1.3), also in $t=1$ insbesondere $\Gamma^k_{11}(r,\theta)=0$, für beliebige $(r,\theta)\in(0,r_0)\times[0,2\pi)$, wie behauptet. Entwickeln wir desweiteren die Geodäte $\alpha\Big(r,z_0,\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\Big)$ bzgl. r um $r=0$ bis zur 2. Ordnung, so erhalten wir aus (1.6):

$$\Phi(r,\theta) = z_0 + r\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix} + \frac{1}{2}r^2\,\ddot\alpha\Big(\tilde r,z_0,\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\Big),$$

für jedes $r\in(0,r_0)$ und ein von r abhängiges $\tilde r\in[0,r]$, und somit:

$$\frac{\partial}{\partial r}\Phi(r,\theta) = \begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix} + r\,\ddot\alpha\Big(\tilde r,z_0,\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\Big), \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\Phi(r,\theta) = r\begin{pmatrix}-\sin(\theta)\\ \cos(\theta)\end{pmatrix} + \frac{1}{2}r^2\,\frac{\partial}{\partial\theta}\ddot\alpha\Big(\tilde r,z_0,\begin{pmatrix}\cos(\theta)\\ \sin(\theta)\end{pmatrix}\Big). \tag{1.8}$$

Hieraus gewinnen wir zunächst nur $g_{12}(r,\theta) \longrightarrow 0$, für $r \searrow 0$ und jedes $\theta \in [0,2\pi)$. Ausserdem wissen wir aber:

$$0 = \Gamma^k_{11}(r,\theta) = \frac{1}{2} g^{ki}(r,\theta)\Big(\frac{\partial}{\partial r} g_{1i} + \frac{\partial}{\partial r} g_{i1} - \frac{\partial}{\partial \theta} g_{11}\Big)(r,\theta) = g^{ki}(r,\theta)\,\frac{\partial}{\partial r} g_{1i}(r,\theta).$$

(Summationskonvention beachten !) Matrix-Multiplikation dieser Gleichung mit (g_{jk}) liefert somit $0 = \frac{\partial}{\partial r} g_{1j}(r,\theta)$, für $j = 1,2$ und jedes $r \in (0,r_0)$, wobei nur der Fall $j = 2$ eine neue und wertvolle Information enthält. Kombinieren wir dies mit dem Hauptsatz der Integral- und Differentialrechnung, so erhalten wir: $g_{12}(r,\theta) - g_{12}(\epsilon,\theta) = \int_{\frac{\epsilon}{r}}^1 \frac{d}{dt} g_{12}(tr,\theta)\,dt = 0$, für jedes $\epsilon \in (0,r)$. Lassen wir nun $\epsilon \searrow 0$ fallen, so gewinnen wir schliesslich $g_{12}(r,\theta) = 0$, für beliebige $(r,\theta) \in (0,r_0) \times [0,2\pi)$, ebenfalls wie behauptet. Desweiteren folgern wir schnell aus (1.8), dass $g_{22}(r,\theta) = r^2(1+O(r))$, also $\lambda(r,\theta) = \sqrt{g_{22}(r,\theta)} = r\sqrt{1+O(r)}$, für $r \searrow 0$ gelten muss, woraus bereits die stetige Fortsetzbarkeit von λ und λ_r in $r = 0$ hinein durch $\lambda(0,\theta) = 0$ und $\lambda_r(0,\theta) = 1$, für alle θ, geschlossen werden kann. Nun kombinieren wir das Theorema Egregium (Korollar 6.1) mit $\Gamma^k_{11} \equiv 0$, für $k = 1,2$, und $g_{12} \equiv 0$:

$$\begin{aligned} K_S(\Phi(r,\theta))\lambda^2(r,\theta) &= K_S(\Phi(r,\theta))\,\det(g_{ij})(r,\theta) = R_{1212}(r,\theta) \\ &= \Big(\frac{\partial}{\partial \theta}\Gamma^2_{11} - \frac{\partial}{\partial r}\Gamma^2_{12} + \Gamma^l_{11}\,\Gamma^2_{l2} - \Gamma^l_{12}\,\Gamma^2_{l1}\Big)(r,\theta)\,g_{22}(r,\theta) \\ &= -\Big(\frac{\partial}{\partial r}\Gamma^2_{12} + \Big(\Gamma^2_{12}\Big)^2\Big)(r,\theta)\,\lambda^2(r,\theta). \end{aligned}$$

Zusammen mit

$$\begin{aligned} \Gamma^2_{12}(r,\theta) = \frac{1}{2} g^{22}(r,\theta)\,\Big(\frac{\partial}{\partial \theta} g_{12} + \frac{\partial}{\partial r} g_{22} - \frac{\partial}{\partial \theta} g_{12}\Big)(r,\theta) &= \frac{1}{2}\,\lambda^{-2}(r,\theta)\frac{\partial}{\partial r}\Big(\lambda^2(r,\theta)\Big) \\ &= \frac{\lambda_r}{\lambda}(r,\theta) \end{aligned}$$

folgt also tatsächlich:

$$K_S(\Phi(r,\theta)) = -\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\lambda_r}{\lambda}(r,\theta)\Big) - \Big(\frac{\lambda_r}{\lambda}(r,\theta)\Big)^2 = -\frac{\lambda_{rr}}{\lambda}(r,\theta), \tag{1.9}$$

also die behauptete Differentialgleichung (1.4), zumindest für alle $(r,\theta) \in (0,r_0) \times [0,2\pi)$. Somit erhalten wir also auch die Existenz von $\lambda_{rr}(0,\theta) := \lim_{r\searrow 0} \lambda_{rr}(r,\theta) = -K_S(z_0)\lambda(0,\theta) = 0$ und wegen

$$\lambda_{rrr}(r,\theta) = -\frac{\partial}{\partial r} K_S(\Phi(r,\theta))\,\lambda(r,\theta) - K_S(\Phi(r,\theta))\,\lambda_r(r,\theta) \longrightarrow -K_S(z_0)$$

sogar diejenige von $\lambda_{rrr}(0,\theta) := \lim_{r\searrow 0} \lambda_{rrr}(r,\theta) = -K_S(z_0)$, für jedes $\theta \in [0,2\pi)$, wobei wir stillschweigend ausnutzten, dass die Gauss'sche Krümmung K_S von S zwar mittels der „Exp-Parametrisierung" Φ (über das Theorema Egregium) auf $U \setminus \{z_0\}$ berechnet werden kann, jedoch nur von der C^7-Fläche S – und nicht etwa von der speziell gewählten Exp-Parametrisierung Φ – abhängt, sodass insbesondere $\frac{\partial}{\partial r} K_S(\Phi(r,\theta))$ und auch $\frac{\partial^2}{\partial r^2} K_S(\Phi(r,\theta))$ auf $(0,r_0) \times [0,2\pi)$ beschränkt sind ! Aus diesem Grund gewinnt man aus der Gleichung (1.9) ebenfalls die Beschränktheit der vierten Ableitung $\frac{\partial^4}{\partial r^4}\lambda(r,\theta)$ auf $(0,r_0) \times [0,2\pi)$.

Insgesamt erhalten wir also in Kombination mit der Lagrange'schen Restgliedformel die in (1.5) behauptete asymptotische Taylorentwicklung von λ bzgl. r bis zur 3.Ordnung:

$$\lambda(r,\theta) = r - \frac{K_S(z_0)}{6}\, r^3 + O(r^4) \qquad \textit{für } r \searrow 0.$$

$\diamond$