Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

SS 2009
22.04.2009
Prof. Dr. U. Dierkes, Dr. R. Jakob

1. Übungsblatt zur Vorlesung
Minimalflächen und Differentialgeometrie

Aufgabe 1:

Sei $\alpha(t)$ eine reguläre, nicht notwendig nach der Bogenlänge (also nicht notwendig mit $|\alpha'(t)| \equiv 1$) parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^3$.

a) Man zeige, dass deren Krümmung κ zum Zeitpunkt t durch die Formel

$$\kappa(t) = \frac{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|}{|\alpha'(t)|^3}$$

gegeben ist. (2)

b) Falls die Krümmung $\kappa(t)$ in keinem t verschwindet, so berechne man für die Torsion $\tau(t)$ von $\alpha(t)$:

$$\tau(t) = -\frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{|\alpha'(t) \times \alpha''(t)|^2}.$$

(3)

Aufgabe 2:

a) Man berechne Krümmung und Torsion der Schraubenlinie

$$\alpha(t) = (a\cos(t), a\sin(t), bt), \quad t \in \mathbb{R},$$

für beliebig fixierte $a, b > 0$. (2)

b) Man bestimme mittels der Frenetschen Formeln die Menge aller Kurven im $\mathbb{R}^3$, welche konstante Krümmung und konstante Torsion haben. (3)
Hinweis: Existiert eine Lösung des matrixwertigen Anfangswertproblems $Z'(t) = A \cdot Z(t)$, $Z(t_0) = Z_0$, mit vorgegebenen reellwertigen, quadratischen Matrizen A und Z_0 für alle $t \in \mathbb{R}$? Ist sie zudem eindeutig, und kann man sie sogar explizit angeben ?

Aufgabe 3:

a) Sei Ω ein (einfach) zusammenhängendes Gebiet in $\mathbb{C}$, $\mathcal{T}$ eine holomorphe Funktion auf Ω und $\Phi(w) := ((1-w^2)\mathcal{T}(w), i(1+w^2)\mathcal{T}(w), 2w\mathcal{T}(w)) \in \mathbb{C}^3$, für $w = u+iv \in \Omega$. Man zeige nun, dass die durch

$$X(w) := X_0 + \Re \int_{w_0}^{w} \Phi(z)\, dz \tag{1}$$

definierte ,,Weierstrass-Darstellung" (mit $w_0 \in \Omega$ und $X_0 \in \mathbb{R}^3$ fest gewählt) eine Minimalfläche im $\mathbb{R}^3$ parametrisiert, also dass $|X_u|^2 - |X_v|^2 = 0 = \langle X_u, X_v \rangle$ und $\triangle X = 0$ in Ω erfüllt sind. (2)

b) Man berechne weiterhin aus (1) den Ausdruck für die Normale $N(w) := \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|}(w)$ und aus diesem wiederum, dass $|N_u|^2 - |N_v|^2 \equiv 0 \equiv \langle N_u, N_v \rangle$ gilt, also dass nicht nur die Fläche X sondern auch deren Normale auf Ω konform parametrisiert ist. (2)

Aufgabe 4:

Man wähle nun in der Weierstrass-Darstellung (1) speziell $X_0 = (\beta, 0, 0)$, für ein $\beta > 0$, $w_0 = 1$ und $\mathcal{T}(w) := -\frac{\beta}{2w^2}$.

a) Man berechne die sich hiermit aus (1) ergebende Minimalfläche X, also deren 3 reellen Komponenten. Man führe anschliessend die Polarkoordinaten $r = |w|$ und $\theta := \arg(w)$, also $w = r\exp(i\theta)$, ein und berechne die 3 reellen Komponenten von X nun als Funktionen von r und θ. Führt man nun noch die neuen Koordinaten $z = z_1 + iz_2 = -\log r - i\theta$ ein, so erhält man günstige Formulierungen für die Komponenten von X als Funktionen von z_1 und z_2, sowie die Form $X(z) = \Re(f(z))$, für eine gewisse Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^3$. (3)

b) Man lese hieraus die Gestalt der Minimalfläche X (des sogenannten Katenoids) ab und fertige zur Anschaulichkeit eine Skizze von dieser an. (1)

c) Anstatt der Fläche $X(z) = \Re(f(z))$ betrachte man nun die zu dieser ,,adjungierten" Fläche $X^*(z) := \Im(f(z))$. Man beweise die Holomorphie von f und deren ,,Isotropie-Relation" $\langle f_z, f_z \rangle := \sum_{i=1}^{3} f_z^i \cdot f_z^i = 0$ auf $\mathbb{C}$ und leite hieraus ab, dass $X^*(z)$ (genau wie $X(z)$) wieder eine Minimalfläche auf ganz $\mathbb{C}$ parametrisiert. Welche geometrische Gestalt hat die Fläche $X^*(z)$, das sogenannte Helikoid ? (2)