Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

SS 2009
03.07.2009
Prof. Dr. U. Dierkes, Dr. R. Jakob

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Minimalflächen und Differentialgeometrie

**Aufgabe 37:**

Man bestimme die Menge aller Geodäten auf dem Durchschnitt eines Ellipsoids $E := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$, $a, b, c > 0$, mit der $(x,y)$-Ebene, d.h. die Menge aller $C^2$-Kurven $\alpha : [0,T] \to E \cap [z = 0]$, die $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)(t) \equiv 0$ auf $[0,T]$ erfüllen. (5)

**Aufgabe 38:**

Wir betrachten wieder einen 2-dimensionalen Torus $S$ mit der Parametrisierung $\phi(u,v) := ((r + a\cos u)\cos v, (r + a\cos u)\sin v, a\sin u)$, für $u, v \in [0, 2\pi)$ und $r > a > 0$ fest, und auf diesem die folgenden beiden Wege vom Punkt $\phi(0,0) = (r + a, 0, 0)$ nach $\phi(0,\pi) = (-(r + a), 0, 0)$:
$\alpha(t) := \phi(t, 0)$, $t \in [0,\pi]$, $\alpha(t) := \phi(\pi, t - \pi)$, $t \in [\pi, 2\pi]$, $\alpha(t) := \phi(3\pi - t, \pi)$, $t \in [2\pi, 3\pi]$, und $\beta(t) := \phi(0, t)$, $t \in [0, \pi]$. $\alpha$ ist also die Aneinanderkettung dreier glatter Wege, also nur stückweise glatt. Kann man den Paralleltransport $\mathcal{P}_\alpha$ von $T_{\phi(0,0)}S$ nach $T_{\phi(0,\pi)}S$ entlang $\alpha$ trotzdem vernünftig definieren ? Wenn ja, wie ? In diesem Falle gebe man die resultierende lineare Abbildung $\mathcal{P}_\alpha : T_{\phi(0,0)}S \to T_{\phi(0,\pi)}S$ explizit an ! Anschliessend gebe man den Paralleltransport $\mathcal{P}_\beta$ von $T_{\phi(0,0)}S$ nach $T_{\phi(0,\pi)}S$ entlang $\beta$ explizit an ! Stimmen $\mathcal{P}_\alpha$ und $\mathcal{P}_\beta$ überein oder nicht ? (5)

**Aufgabe 39:**

a) Für ein beliebiges auf der Einheitskreisscheibe $B := B_1^2(0)$ holomorphes $F \in C^0(\bar{B}, \mathbb{C})$ beweise man mittels des Cauchy-Integralsatzes die sogenannte Poisson-Formel für holomorphe Funktionen:

$$F(r\exp(i\theta)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\exp(it))\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)}\,dt,$$

für jeden Punkt $r\exp(i\theta) \in B$. (3)

b) Sei nun $f \in C^2(B, \mathbb{R}) \cap C^1(\bar{B}, \mathbb{R})$ eine Lösung von $\triangle f = 0$ auf $B$ mit Randwerten $\psi \in C^1(\partial B, \mathbb{R})$. Man konstruiere zunächst zu $f$ eine weitere (auf $B$) harmonische Funktion $\tilde{f} \in C^0(\bar{B}, \mathbb{R})$, sodass $F := f + i\tilde{f}$ auf $B$ holomorph und stetig auf $\bar{B}$ ist. Mittels der Poisson-Formel aus Teil (a) soll nun die sogenannte Poisson-Formel für harmonische Funktionen:

$$f(r\exp(i\theta)) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\exp(it))\frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - t)}\,dt,$$

für jeden Punkt $r\exp(i\theta) \in B$, bewiesen werden. (2)

c) Man leite aus der Poisson-Formel aus Teil (b) die Abschätzung

$$\max_{\bar{B}_\rho(0)} |f| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\psi(\exp(it))| \, dt \, \frac{1+\rho}{1-\rho},$$

für $\rho < 1$, für harmonisches $f \in C^2(B, \mathbb{R}) \cap C^1(\bar{B}, \mathbb{R})$ her. (1)

d) Bonus*-Swimming-pool-exercise: Für solche $f$ müsste man doch eigentlich aus der Poisson-Formel insbesondere das Maximum-Prinzip $\max_{\bar{B}} |f| = \max_{\partial B} |f|$ wiedergewinnen können, oder nicht ? Bitte nichts rechnen ! Man braucht bloss eine ,,tricky idea" ! (1*)

**Aufgabe 40:**

a) Sei $\{f_n\}$ eine Folge reellwertiger, gleichgradig stetiger und gleichmässig beschränkter Funktionen auf dem kompakten Abschluss $K$ eines Teilgebiets eines $\mathbb{R}^N$. Man beweise nun, dass man aus $\{f_n\}$ eine Teilfolge $\{f_{n_k}\}$ auswählen kann, die auf $K$ gleichmässig gegen eine Funktion $f \in C^0(K, \mathbb{R})$ konvergiert. (Dies ist der Satz von Arzela-Ascoli.) (3)

b) Ist umgekehrt jede in $C^0(K, \mathbb{R})$ (also gleichmässig auf $K$) konvergente Folge $\{f_n\}$ gleichgradig stetig und gleichmässig beschränkt auf $K$ ? Ist nun beispielsweise die Folge $\{f_n(x) := \sin(nx)\}$ auf $K := [-1, 1]$ gleichmässig konvergent ? Und falls ja, wie lautet deren Limesfunktion $f$ ? Oder ist beispielsweise $\{g_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx)\}$ gleichgradig stetig auf $K := [-1, 1]$ ? (1)