Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

SS 2009
11.07.2009
Prof. Dr. U. Dierkes, Dr. R. Jakob

11. Übungsblatt zur Vorlesung
Minimalflächen und Differentialgeometrie

Aufgabe 41:

Sei S eine n-dimensionale C^3-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ und $z \in S$ beliebig fixiert. Man zeige, dass der Domain$(\exp_z) =: \mathcal{D}_z$, also die maximale offene Umgebung des Ursprungs von T_zS, auf der $\exp_z$ (wie in der Vorlesung) definierbar ist, sternförmig bezüglich der $0 \in T_zS$ ist, d.h. dass mit jedem $v \in \mathcal{D}_z$ bereits die gesamte Strecke $[0, v] \subset \mathcal{D}_z$ sein muss. (4)
Hinweis: Man muss hierfür nur die Proposition 8.2 aus der Vorlesung leicht verallgemeinern bzw. modifizieren !

Aufgabe 42:

Wir betrachten wieder eine n-dimensionale C^3-Untermannigfaltigkeit S des $\mathbb{R}^{n+1}$ und einen festen Punkt $z \in S$.

a) Man berechne die Jacobi-Matrix $D(\exp_z)(0)$ der Exponentialabbildung $\exp_z$ in der $0 \in T_zS$ und leite bereits hieraus ab, dass es eine Umgebung $B_\delta(0)$ der $0 \in T_zS$ gibt, die von $\exp_z$ diffeomorph auf eine Umgebung von $z \in S$ abgebildet wird. (3)
Hinweis: Man muss nur die Definition von $\exp_z$ und Proposition 8.2 geschickt anwenden und dann die Definition eines Diffeomorphismus' zwischen Mannigfaltigkeiten korrekt nachprüfen (wobei hier ja bereits die Start-Mannigfaltigkeit $B_\delta(0)$ im linearen Raum T_zS liegt).

b) Aus dem Resultat von (a) leite man die Koeffizienten $g_{ij}(0)$ der ersten Fundamentalform der errungenen Parametrisierung $\Phi := \exp_z |_{B_\delta(0)}$ (von $\exp_z(B_\delta(0)) \subset S$) in der $0 \in T_zS$ ab. Man berechne also die Einträge der Matrix $D(\exp_z)(0)^T D(\exp_z)(0)$. Anschliessend berechne man die Christoffel-Symbole $\Gamma^k_{ij}(0)$ von $\Phi := \exp_z |_{B_\delta(0)}$ in der $0 \in T_zS$. (3)
Hinweis: Man muss anhand von Proposition 8.2 und der Definition von $\exp_z$ begründen, warum genau für lineare Kurven $\gamma(t) = tv$ durch die 0 in T_zS die Bilder $\exp_z(\gamma(t))$ Geodäten in S mit Startpunkt z sind ! Andererseits müssen dann also all diese Ursprungs-Geraden $\gamma(t)$ der ,,Geodäten-Gleichung" (GEO) bzgl. $\Phi := \exp_z |_{B_\delta(0)}$ aus der Vorlesung genügen, in der ja die $\Gamma^k_{ij}(\gamma(t))$ bzgl. $\Phi := \exp_z |_{B_\delta(0)}$ alle auftauchen !

Aufgabe 43:

a) Sei F eine auf dem Abschluss der Halbkreisscheibe $D := B^2_1(0) \cap \mathbb{H}$ stetige und in D holomorphe Funktion, welche auf $[-1, 1]$ nur reelle Werte annimmt, also mit $F([-1, 1]) \subset \mathbb{R}$.

Man beweise, dass sich F zu einer auf ganz $\bar{B} := \bar{B}_1^2(0)$ stetigen und in B holomorphen Funktion $\tilde{F}$ fortsetzen lässt. (Dies ist das Schwarzsche Spiegelungsprinzip für holomorphe Funktionen.) (3)

Hinweis: Man muss die Werte von F an der reellen Gerade geschickt auf $\bar{B} \setminus \bar{D}$ „hinunterspiegeln", dann mittels der Cauchy-Riemann-Gleichungen die Holomorphie von $\tilde{F}$ auf $B \setminus \bar{D}$ nachweisen und schliesslich dessen Holomorphie auf ganz B mittels des Cauchy-Integralsatzes zeigen !

b) Sei nun $f = f(u,v) \in C^2(D,\mathbb{R}) \cap C^1(\bar{D},\mathbb{R})$ eine Lösung von $\triangle f = 0$ auf D mit entweder $\frac{\partial}{\partial v} f(u,0) = 0$ oder $f(u,0) = 0$ auf ganz $[-1,1]$. Lässt sich mittels der Konstruktion aus Aufgabe 39 (b) und des obigen Schwarzschen Spiegelungsprinzips für holomorphe Funktionen solch ein f (in beiden Fällen) zu einer auf ganz $\bar{B}$ stetigen und in B harmonischen Funktion $\tilde{f}$ fortsetzen bzw. „hinunterspiegeln" ? (2)

Aufgabe 44:

Sei F eine holomorphe Funktion auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft, dass deren komplexe Ableitung $F'(z)$ in allen Punkten z einer Teilmenge $A \subset \Omega$ verschwindet, welche mindestens einen Häufungspunkt $z_0 \in \Omega$ besitzt. Man zeige, dass dann erstens die Ableitungen $F^{(k)}(z_0)$ beliebiger Ordnung $k > 0$ in z_0 null sind und damit zweitens F auf ganz Ω konstant sein muss. (5)