Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

SS 2009
30.04.2009
Prof. Dr. U. Dierkes, Dr. R. Jakob

2. Übungsblatt zur Vorlesung
Minimalflächen und Differentialgeometrie

Aufgabe 5:

Sei $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ von der Klasse C^3 mit $r(t) > 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, und $\alpha(t) = (r(t)\cos t, r(t)\sin t)$.

a) Man zeige, dass hiermit eine bereits *reguläre* Kurve α in $\mathbb{R}^2 \setminus 0$ definiert wurde und dass sich deren Krümmung κ aus r mittels der Formel

$$\kappa(t) = \frac{2(r')^2 - rr'' + r^2}{((r')^2 + r^2)^{3/2}}(t) \tag{1}$$

berechnen lässt. (3)

b) Man benutze die Formel (1), um die Krümmung der ,,Archimedischen Spirale" α, gegeben durch $r(t) = at$ mit $a > 0$, und der ,,logarithmischen Spirale" β, gegeben durch $\log r(t) = bt$ mit $b > 0$, zu berechnen. Wie verhalten sich die Krümmungen dieser beiden Spiralen asymptotisch für sehr gross werdende t ? (2)

Aufgabe 6:

a) Man berechne die Krümmung einer Ellipse α, welche durch $\alpha(t) = (a\cos t, b\sin t)$, für $t \in [0, 2\pi]$ und $a > b > 0$, parametrisiert sei, und vergewissere sich insbesondere darüber, dass deren Krümmung κ in allen $t \in [0, 2\pi]$ positiv ist. In welchen und wievielen Punkten t_j verschwindet deren Ableitung κ' ? (2)

b) Sei nun allgemeiner Ω ein konvexes Gebiet in $\mathbb{R}^2$, welches von einer regulären, geschlossenen C^3-Kurve $\alpha : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ berandet werde. Man beweise nun, dass deren Krümmung κ_α in keinem t negativ werden kann. (3)
Hinweis: Betrachte einen beliebigen Randpunkt $\alpha(t)$ von Ω und die durch diesen führende ,,Stützgerade" G_t (an $\partial\Omega$), welche von der Tangenten $\alpha'(t)$ aufgespannt wird. Man benutze nun, dass Ω vollständig in einer der beiden Halbebenen enthalten ist, in die der $\mathbb{R}^2$ von G_t aufgeteilt wird.

Aufgabe 7:

Man wähle in der Weierstrass-Darstellung aus Aufgabe 3 (des 1. Übungsblattes) speziell $X_0 = (0,0,0)$, $w_0 = 0$ und $\mathcal{T}(w) := 1$. Man betrachte also die Minimalfläche $X(w) := \Re(\int_0^w \Phi(z)\,dz)$ mit $\Phi(w) := ((1-w^2), i(1+w^2), 2w) \in \mathbb{C}^3$, für $w = u + iv \in \mathbb{C}$.

a) Man berechne die 3 reellen Komponenten von X als Funktionen von u und v, entnehme diesen die Gestalt der Minimalfläche X (der sogenannten Enneper-Fläche) und fertige zur Anschaulichkeit eine Skizze von dieser an. (2)

b) Aus den Rechnungen für Aufgabe 3 sollte bereits bekannt sein, dass die Normale N von X durch $N(u,v) := \frac{1}{1+u^2+v^2}(2u, 2v, u^2+v^2-1)$ gegeben ist. Man berechne nun mittels deren Ableitungen N_u, N_v (und mittels X_u, X_v) die Koeffizienten $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ der zweiten Fundamentalform der Fläche X und anschliessend deren mittlere Krümmung $H_X(u,v)$ und Gaußsche Krümmung $K_X(u,v)$. Fiebern wir bei den Berechnungen von $H_X(u,v)$ und $K_X(u,v)$ bestimmten Ergebnissen entgegen ? Haben wir a priori gewisse Erwartungen ? (3)

Aufgabe 8:

Sei Ω ein zusammenhängendes Teilgebiet des $\mathbb{R}^2$, $\zeta \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ und $X(u,v) := (u, v, \zeta(u,v))$ die „nicht-parametrische" Fläche X zu ζ, also der Graph von ζ über Ω.

a) Über einem beliebig fixierten Punkt $(u,v) \in \Omega$ drücke man nun zunächst mittels der ersten Ableitungen ζ_u, ζ_v die Komponenten der Einheitsnormalen N von X und die Koeffizienten $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ der ersten Fundamentalform und dann noch mittels Hinzunahme der zweiten Ableitungen ζ_{uu}, ζ_{uv}, ζ_{vv} die Koeffizienten $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ der zweiten Fundamentalform der Fläche X aus. Welcher Ausdruck ergibt sich somit für die mittlere Krümmung $H_X(u,v)$ und die Gaußsche Krümmung $K_X(u,v)$ der Fläche X (in $(u, v, \zeta(u,v))$) ? (4)

b) Welche partielle Differentialgleichung muss also die Funktion ζ auf Ω lösen, damit ihr Graph eine vorgegebene mittlere Krümmung $H \in C^0(\mathbb{R}^3)$ über Ω hat ? (1)