Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

SS 2009
08.05.2009

Prof. Dr. U. Dierkes, Dr. R. Jakob

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Minimalflächen und Differentialgeometrie

Aufgabe 9:

a) Man beweise die bereits in Zusammenhang mit Aufgabe 2 (b) aufgetretene Formel $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B)$, falls A und B miteinander kommutierende $n \times n$-Matrizen sind, also falls $AB = BA$ gilt, und zwar indem man sich zunächst von $\exp(A)B = B\exp(A)$ überzeugt und anschliessend sogar $\exp((A+B)t) = \exp(At)\exp(Bt)$, $t \in \mathbb{R}$, aus unserem Eindeutigkeitssatz für Anfangswertprobleme erster Ordnung ableitet. (2)

b) Man zerlege nun die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in die beiden Matrizen $A_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $A_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, sodass also $A = A_1 + A_2$ gilt. Wie lauten deren „exponierten" Matrizen $\exp(At)$, $\exp(A_1t)$ und $\exp(A_2t)$, $t \in \mathbb{R}$? Gilt hier $\exp(At) = \exp(A_1t)\exp(A_2t)$ oder $A_1A_2 = A_2A_1$? Inwiefern hängt das Ergebnis der Berechnung von $\exp(At)$ mit der Eulerschen Formel $\exp(it) = \cos(t) + i\sin(t)$ zusammen ? (2)

c) Man leite aus (a) her, dass $\exp(A)$ eine orthogonale Matrix, also ein Element der $O(n)$ ist, falls $A = -A^T$ gilt. (1)

Aufgabe 10:

a) Sei $\alpha(t)$ eine reguläre, nicht notwendig mit $|\alpha'(t)| \equiv 1$ parametrisierte Kurve im $\mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass $\alpha'(t)$ und $\alpha''(t)$ zu jedem Zeitpunkt t linear abhängige Vektoren sind. Bestimmt solch eine Bedingung bereits die geometrische Gestalt der Kurve α ? Wenn ja, welche Form muss α dann haben ? (2)

b) Man zeige, dass die $O(3)$ als eine reguläre Hyperfläche im $\mathbb{R}^9$ aufgefasst werden kann. Welche Dimension hat sie ? (3)
Hinweis: Man überlege sich, wie die Definition der $O(3)$ eine Funktion $F : \mathbb{R}^9 \longrightarrow \mathbb{R}^k$ (für ein bestimmtes $k < 9$) nahelegt, sodass $O(3) = F^{-1}(0)$ ist. Wie lautet die Jacobimatrix $DF(x_1, \ldots, x_9)$ und warum hat sie in allen Punkten der $O(3)$ den maximalen Rang k ?

Aufgabe 11:

Sei $\zeta \in C^2([-R,R],\mathbb{R}_+)$ eine Funktion auf dem abgeschlossenen Intervall $[-R,R]$ mit nichtnegativen Werten. Wir betrachten die Rotationsfläche X im $\mathbb{R}^3$, welche bei Drehung des Graphen $\{(x,0,\zeta(x)) \mid x \in [-R,R]\}$ von ζ um die x-Achse entsteht.

a) Man gebe zunächst eine Parametrisierung der entstandenen Rotationsfläche X mittles ζ an und berechne aus dieser die Koeffizienten $\mathcal{E},\mathcal{F},\mathcal{G}$ der ersten Fundamentalform und anschliessend die Koeffizienten $\mathcal{L},\mathcal{M},\mathcal{N}$ der zweiten Fundamentalform der Fläche X. Welcher Ausdruck ergibt sich somit für die mittlere Krümmung H_X und die Gaußsche Krümmung K_X in einem beliebigen Punkt der Fläche X ? (4)

b) Welche Differentialgleichungen muss ζ somit erfüllen, damit die aus ζ entstandene Rotationsfläche X eine Minimalfläche ist, also $\triangle X = 0$ und die Konformitätsrelationen $\mathcal{E} = \mathcal{G}$, $\mathcal{F} = 0$ in allen Punkten ihres Definitionsbereiches erfüllt ? Hat das sich ergebende System von Differentialgleichungen überhaupt eine Lösung in $C^2([-R,R],\mathbb{R}_+)$? Wenn ja, wieviele Dimensionen hat dieser Lösungsraum und von welchen Funktionen wird er aufgespannt ? Angenommen, es existiert mindestens eine solche Lösung ζ^*. Inwiefern vereinfachen sich nun die Ausdrücke für $\mathcal{L},\mathcal{M},\mathcal{N}$, H_{X^*} und K_{X^*} der von ζ^* erzeugten Rotationsfläche X^* ? Man prüfe insbesondere $H_{X^*} = 0$ nach. (2)
Hinweis zu b): Man lasse sich von Aufgabe 4 (a,b) inspirieren !!

Aufgabe 12:

Sei Ω ein zusammenhängendes Teilgebiet eines $\mathbb{R}^n$ und $f = f(x,z,p) \in C^1(\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$.

a) Wie oft müssen zwei reellwertige Funktionen u,ϕ auf Ω stetig differenzierbar sein, damit das parameterabhängige Integral

$$\mathcal{F}(u+\epsilon\phi) := \int_\Omega f(x,(u+\epsilon\phi)(x),(\nabla u+\epsilon\nabla\phi)(x))\, d\mathcal{L}^n(x)$$

sicherlich stetig nach ϵ differenzierbar ist, für $|\epsilon| < 1$? Welcher Ausdruck ergibt sich in diesem Fall für die erste Variation

$$\delta\mathcal{F}(u,\phi) := \frac{d}{d\epsilon}\mathcal{F}(u+\epsilon\phi)|_{\epsilon=0}.$$

Wie oft müssen die Funktionen u und $\nabla_p f$ stetig differenzierbar sein, damit man aus dem Wissen, dass $\delta\mathcal{F}(u,\phi) = 0$ für alle $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ gilt, eine partielle Differentialgleichung (die Euler-Lagrange-Gleichung) für u auf Ω herleiten kann, in der die „Störungsfunktionen" ϕ günstigerweise nicht mehr auftauchen. (3)

b) Wie sieht diese Euler-Lagrange-Gleichung für u im Spezialfall $f(x,z,p) := |p|^2 - 2\,g(x,z)$, mit einem „Potential" $g \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$, aus, für $n > 1$ und speziell für $n = 1$? (1)