Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

SS 2009
15.05.2009
Prof. Dr. U. Dierkes, Dr. R. Jakob

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Minimalflächen und Differentialgeometrie

Aufgabe 13:

a) Man zeige, dass die $SL(n,\mathbb{R})$, also die Gruppe aller reellen $n \times n$-Matrizen A mit $\det(A) = 1$, als eine reguläre Hyperfläche im $\mathbb{R}^{n^2}$ aufgefasst werden kann. Welche Dimension hat sie ? (3)
Hinweis: Man zeige für $F(y_1, y_2, \dots, y_{n^2}) := \det(Y) - 1$, dass in jedem $X \in SL(n,\mathbb{R})$ das totale Differential $dF(X)$ von F (bzw. dessen ,,Richtungsableitung") in Richtung einer Matrix H der Form $H := X \cdot C$, für eine beliebige reelle $n \times n$-Matrix C, den Wert $Spur(C)$ hat. Was bedeutet dies also für $dF(X)$ bzw. $\nabla F(x_1, \dots, x_{n^2})$ und somit für die $SL(n,\mathbb{R})$?

b) Wir betrachten auf dem Gebiet $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > e, y > e\}$ die Funktion $f(x,y) := x^y - y^x$. Man entscheide mit präziser Begründung, ob die Niveau-Menge $f^{-1}(0) \subset \Omega$ eine eindimensionale ,,reguläre Hyperfläche" im $\mathbb{R}^2$ ist, oder nicht. Welche Gestalt hat $f^{-1}(0)$ überhaupt und inwiefern spielt der ,,Eckpunkt" $(e,e) \notin \Omega$ hier eine heikle Rolle ? (2)

Aufgabe 14:
Sei $f(x,y,z) := x + y + z - \sin(xyz)$ auf $(-1,1)^3 \subset \mathbb{R}^3$ gegeben.

a) Wieso lässt sich $f^{-1}(0) \cap B^3_r(0)$, für ein hinreichend kleines $r > 0$, sowohl als Graph einer Funktion $h_1 \in C^\infty(U_1)$ über einer offenen Umgebung U_1 des Punktes $(0,0)$ aus der (y,z)-Ebene, als auch als Graph einer Funktion $h_2 \in C^\infty(U_2)$ über einer offenen Umgebung U_2 des Punktes $(0,0)$ aus der (x,z)-Ebene, als auch als Graph einer Funktion $h_3 \in C^\infty(U_3)$ über einer offenen Umgebung U_3 des Punktes $(0,0)$ aus der (x,y)-Ebene darstellen ? (2)

b) Man folgere aus den Relationen $f(h_1(y,z), y, z) \equiv 0$, $f(x, h_2(x,z), z) \equiv 0$ und $f(x, y, h_3(x,y)) \equiv 0$ Formeln für die Gradienten $\nabla_{(y,z)} h_1(y,z)$, $\nabla_{(x,z)} h_2(x,z)$ und $\nabla_{(x,y)} h_3(x,y)$. Welche Resultate erhalten wir insbesondere für $\nabla_{(y,z)} h_1(0,0)$, $\nabla_{(x,z)} h_2(0,0)$ und $\nabla_{(x,y)} h_3(0,0)$? (2)

c) Man leite schliesslich aus den Formeln für $\nabla_{(y,z)} h_1(y,z)$, $\nabla_{(x,z)} h_2(x,z)$ und $\nabla_{(x,y)} h_3(x,y)$ die Relation $\frac{\partial h_3(x,y)}{\partial x} \frac{\partial h_2(x,z)}{\partial z} \frac{\partial h_1(y,z)}{\partial y} = -1$ für $(x,y,z) \in f^{-1}(0) \cap B^3_r(0)$ her. Inwiefern geht in diese Formel überhaupt unser konkret vorgegebenes f ein ? (1)

Aufgabe 15:

Sei $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ eine konform parametrisierte, reguläre C^2-Fläche auf einem beschränkten Teilgebiet Ω des $\mathbb{R}^2$. Man berechne eine Formel für die zweite Variation

$$\delta^2 \mathcal{A}(X, \phi N) := \frac{d^2}{d\epsilon^2} \mathcal{A}(X + \epsilon \phi N)|_{\epsilon=0}$$

des Flächeninhalts $\mathcal{A}$ in X bei Störung in „Normalen-Richtung" ϕN, für $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$, wobei N die Einheitsnormale von X bezeichne, indem man die Taylorentwicklung des (Integranden des) parameterabhängigen Integrals $\mathcal{A}(X + \epsilon\phi N)$ in ϵ bis zur (einschliesslich) zweiten Ordnung unter Verwendung der Konformitätsrelationen von X herleitet, diese zweimal nach ϵ differenziert und das Resultat dann in $\epsilon = 0$ auswertet. Es soll hierbei eine quadratische Form in $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$ herauskommen, in die nur die Gauss-Krümmung K_X und der konforme Faktor $\mathcal{E} = \mathcal{G} > 0$ von X eingehen. (5)

Aufgabe 16:

Sei Ω ein Teilgebiet von $\mathbb{C}$, f eine holomorphe Funktion auf Ω und $B_R(z_0) \subset\subset \Omega$ eine beliebig fixierte Scheibe.

a) Man beweise zunächst den Cauchy-Integral-Satz, welcher besagt, dass sich in jedem Punkt $z \in B_R(z_0)$ der Wert $f(z)$ mittels

$$2\pi i f(z) = \int_{\partial B_R(z_0)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

berechnen lässt. Man darf und soll hierfür benutzen, dass $\int_{\partial B_R(z_0)} g(\zeta)\, d\zeta = \int_{\partial B_r(z)} g(\zeta)\, d\zeta$ für jede Scheibe $B_r(z) \subset\subset B_R(z_0)$ um z und für eine beliebige in $\Omega \setminus \{z\}$ holomorphe Funktion g gilt. (2)

b) Man leite hieraus eine ganz ähnliche Darstellungsformel für die n-te Ableitung $f^{(n)}(z)$ für jedes $z \in B_R(z_0)$ und jedes n her und daraus insbesondere eine Abschätzung von $|f^{(n)}(z_0)|$ nach oben, in die nur $\max_{\partial B_R(z_0)} |f|$, R und n eingehen. (2)

c) Man beweise schliesslich mittels dieser sogenannten Cauchy-Abschätzungen, dass eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion bereits konstant sein muss, falls ihr Supremum $\sup_{\mathbb{C}} |f|$ endlich ist (Satz von Liouville). (1)