Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

SS 2009
22.05.2009
Prof. Dr. U. Dierkes, Dr. R. Jakob

5. Übungsblatt zur Vorlesung
Minimalflächen und Differentialgeometrie

Aufgabe 17:

a) Wir betrachten ein Ellipsoid $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$, mit $a, b, c > 0$. Man gebe den Tangentialraum $T_{(x,y,z)}E$ und den Normalraum $T^{\perp}_{(x,y,z)}E$ in einem beliebigen Punkt $(x, y, z) \in E$ an. (2)

b) Nun gebe man den Tangentialraum und den Normalraum an das einschalige Hyperboloid $H_c := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 - c^2 = z^2\}$ mit dem ,,Nackenradius" $c > 0$ in einem beliebigen Punkt $(x, y, z) \in H_c$ an. In welches geometrische Objekt verwandelt sich H_c für $c \to 0$? Ist das Grenzobjekt H_0 noch immer eine reguläre Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$? Falls nicht, so gebe man mindestens einen Punkt $s \in H_0$ an, in dessen Umgebung sich H_0 nicht als (2-dimensionaler) Graph darstellen lässt. Gibt es zu solch einem ,,singulären" Punkt $s \in H_0$ vielleicht doch genau eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, die man als ,,Tangentialebene" $T_s H_0$ sinnvoll definieren könnte ? (3)

Aufgabe 18:

Es seien in einem $\mathbb{R}^N$ zwei sich schneidende C^k- Untermannigfaltigkeiten S_1, S_2 der Dimensionen r und s mit $s + r > N$ gegeben, und sei $z \in S_1 \cap S_2$ beliebig fixiert.

a) Unter welcher Bedingung an die Normalräume $T^{\perp}_z S_1$ und $T^{\perp}_z S_2$ im Punkt z lässt sich die Existenz einer hinreichend kleinen Umgebung $B^N_r(z)$ von z garantieren, sodass $(S_1 \cap S_2) \cap B^N_r(z)$ sicherlich wieder eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^N$ ist ? (3)

b) Von welcher Differenzierbarkeitsklasse C^l und von welcher Dimension ist in diesem Falle $(S_1 \cap S_2) \cap B^N_r(z)$, und wie lassen sich deren Normalraum $T^{\perp}_z(S_1 \cap S_2)$ und Tangentialraum $T_z(S_1 \cap S_2)$ durch die beiden Normalräume $T^{\perp}_z S_1$ und $T^{\perp}_z S_2$ bzw. Tangentialräume $T_z S_1$ und $T_z S_2$ ausdrücken ? (2)

Aufgabe 19:

Sei Ω ein Teilgebiet des $\mathbb{R}^2$ und $\zeta(x,y) \in C^2(\Omega,\mathbb{R})$.

a) Man beweise folgende Formeln für die mittlere Krümmung H des Graphen von ζ über Ω:

$$\Big(\frac{\zeta_x\zeta_y}{(1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}}\Big)_y(x,y) - \Big(\frac{1+\zeta_y^2}{(1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}}\Big)_x(x,y) = 2\,\zeta_x H(x,y,\zeta(x,y)),$$

$$\Big(\frac{\zeta_x\zeta_y}{(1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}}\Big)_x(x,y) - \Big(\frac{1+\zeta_x^2}{(1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}}\Big)_y(x,y) = 2\,\zeta_y H(x,y,\zeta(x,y)),$$

$$div\Big(\frac{\nabla\zeta}{(1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}}\Big)(x,y) = 2\,H(x,y,\zeta(x,y)) \quad in \quad \Omega.$$

(5)

Aufgabe 20:

Sei Ω ein glattberandetes Teilgebiet des $\mathbb{R}^2$, $\zeta \in C^2(\Omega,\mathbb{R})\cap C^1(\bar\Omega,\mathbb{R})$, $X(u,v) := (u,v,\zeta(u,v))$ die ,,nicht-parametrische" Fläche X zu ζ und $\mathcal{A}(\zeta) := \mathcal{A}(X) = \int_\Omega (1+|\nabla\zeta|^2)^{\frac{1}{2}}\,dudv$ ihr Flächeninhalt.

a) Man beweise zunächst, dass das Funktional $\mathcal{A}$ auf $C^2(\Omega,\mathbb{R})\cap C^1(\bar\Omega,\mathbb{R})$ strikt konvex ist, also dass $\mathcal{A}(t\,\zeta_1 + (1-t)\,\zeta_2) < t\mathcal{A}(\zeta_1) + (1-t)\mathcal{A}(\zeta_2)$ für beliebige $\zeta_1,\zeta_2 \in C^2(\Omega,\mathbb{R})\cap C^1(\bar\Omega,\mathbb{R})$ und $t \in (0,1)$ erfüllt ist. (2)

b) Seien nun ,,Randwerte" $r \in C^1(\bar\Omega,\mathbb{R})$ gegeben, und betrachten wir die Randwertklasse $[r] := \{\zeta \in C^2(\Omega,\mathbb{R})\cap C^1(\bar\Omega,\mathbb{R}) |\, \zeta|_{\partial\Omega} = r|_{\partial\Omega}\}$. Man beweise: 1.) Es gibt in der Randwertklasse $[r]$ höchstens einen Minimierer ζ^* von $\mathcal{A}$, also höchstens ein $\zeta^* \in [r]$ mit $\mathcal{A}(\zeta^*) = \inf_{[r]}\mathcal{A}$. 2.) Falls ein $\zeta^* \in [r]$ die Minimalflächengleichung

$$div\Big(\frac{\nabla\zeta^*}{(1+|\nabla\zeta^*|^2)^{\frac{1}{2}}}\Big) = 0 \quad in \quad \Omega$$

erfüllt, so muss ζ^* bereits dieser eindeutige Minimierer von $\mathcal{A}$ in $[r]$ sein. (3)

Schöne Pfingsten !! (Abgabe dieses Blattes also erst am 8.6.)