Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

SS 2009
05.06.2009

Prof. Dr. U. Dierkes, Dr. R. Jakob

6. Übungsblatt zur Vorlesung
Minimalflächen und Differentialgeometrie

Aufgabe 21:

Sei S eine C^∞-Untermannigfaltigkeit eines $\mathbb{R}^{n+l}$ und seien V und $\tilde{V}$ zwei C^∞-Vektorfelder auf einer Umgebung von S, deren Einschränkungen auf S tangentiell und vollständig seien.

a) Man beweise erstens, dass dann ebenfalls deren Kommutatorfeld $[V, \tilde{V}]$ entlang S tangentiell ist. (2)

b) Man beweise zweitens, dass das Kommutieren der von V und $\tilde{V}$ auf S erzeugten Flüsse, also dass $\phi^t \circ \tilde{\phi}^r = \tilde{\phi}^r \circ \phi^t$ für alle $t, r \in \mathbb{R}$, die Relation $[V, \tilde{V}] \equiv 0$ entlang S zur Folge hat. (Benutzt hierzu den Hinweis aus der Vorlesung !) (3)

Aufgabe 22:

Wir betrachten einen 2-dimensionalen Torus T im $\mathbb{R}^3$, welcher durch die reguläre Parametrisierung $X(u,v) := ((r + a\,\cos u)\cos v, (r + a\,\cos u)\sin v, a\,\sin u)$, für $u, v \in [0, 2\pi)$ und $r > a > 0$, gegeben sei. Nun definieren wir die beiden Tangential-Vektorfelder V und $\tilde{V}$ auf T durch $V(z) := X_u(X^{-1}(z))$ und $\tilde{V}(z) := X_v(X^{-1}(z))$, für $z \in T$.

a) Sind V und $\tilde{V}$ vollständige Vektorfelder auf T ? Man überzeuge sich über die Richtigkeit der Antwort auf diese Frage, indem man die von V und $\tilde{V}$ erzeugten Flüsse ϕ und $\tilde{\phi}$ auf T explizit angibt und eine Skizze von deren Stromlinien entlang T anfertigt. (2)

b) Man berechne das Kommutatorfeld $[V, \tilde{V}]$ von V und $\tilde{V}$ auf T. Man hat die Wahl, hierzu entweder die bereits angegebenen Flüsse ϕ und $\tilde{\phi}$ zu verwenden oder die beiden Vektorfelder auf eine offene Umgebung Ω von T zu C^∞-Vektorfeldern $\mathcal{V}$ und $\tilde{\mathcal{V}}$ fortzusetzen und dann $[\mathcal{V}, \tilde{\mathcal{V}}]$ auf ganz Ω explizit zu berechnen. (3)

Aufgabe 23:

Sei M eine 2-dimensionale C^3-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$, welche lokal um einen Punkt $x_0 \in M$ durch eine Kartenabbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ über einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ parametrisiert werde, also sodass $M \cap B_r^3(x_0) = X(\Omega)$ für ein kleines $r > 0$ gilt. Die Koeffizienten g_{ij} der ersten Fundamentalform von X statten nun $M \cap B_r^3(x_0)$ (auf kanonische Weise) mit einer ,,Metrik" aus, also mit einem Skalarprodukt auf jedem Tangentialraum T_xM, zu jedem $x \in M \cap B_r^3(x_0)$. Man beweise nun, dass sich die Gauss'sche Krümmung $K(x)$ von M in jedem Punkt $x = X(w) \in M \cap B_r^3(x_0)$ im Spezialfall einer ,,konformen Metrik" $g_{ij}(w) = \Lambda(w)\,\delta_{ij}$, für ein $\Lambda \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{>0})$, durch die Formel $K(x) = -\frac{1}{2\Lambda(w)} \triangle \log \Lambda(w)$ berechnen lässt.
Hinweis: Man versuche, die Determinante der Koeffizientenmatrix B der 2. Fundamentalform von X durch die sogenannten Christoffel-Symbole 2. Art und die Christoffel-Symbole 1. und 2. Art wiederum durch Λ und seine Ableitungen auszudrücken. (Stichwort: Gauss-Gleichungen) (5)

Aufgabe 24:
Sei $f : B_1(0) \to B_1(0)$ eine holomorphe Abbildung.

a) Man beweise zunächst mittels des Maximum-Prinzips für den Betrag holomorpher Funktionen, dass unter der zusätzlichen Bedingung $f(0) = 0$ bereits $|f(z)| \leq |z|$ für jedes $z \in B_1(0)$ und zudem $|f'(0)| \leq 1$ gelten muss. (Lemma von Schwarz-Pick)
Inwiefern lässt sich die Form von f präzise angeben, wenn für nur einen einzigen Punkt $z_0 \in B_1(0) \setminus \{0\}$ die Gleichheit $|f(z_0)| = |z_0|$ gilt ? (2)

b) Nun lasse man die Voraussetzung $f(0) = 0$ fallen und verallgemeinere das obige Resultat zu einer Formel, die $|f(z) - f(0)|$ möglichst scharf nach oben abschätzt, wie beispielsweise zu:

$$|f(z) - f(0)| < 2\left(\frac{1 - |f(0)|^2}{1 - |z|^2|f(0)|^2}\right)^{1/2}|z| \quad \textit{für} \quad z \in B_1(0) \setminus \{0\}.$$

Hinweis: Man versuche, sich mittels Verwendung einer zu f geeignet gewählten biholomorphen Abbildung von $B_1(0)$ auf sich in die Position der Aufgabenstellung von Teil (a) zu bringen, um jenes Lemma von Schwarz-Pick doch anwenden zu können. Wie sieht die sogenannte Automorphismengruppe der Einheitskreisscheibe $B_1(0)$ überhaupt aus ? (3)

(Abgabe dieses Blattes am 15.6.)