7. Übungsblatt zur Vorlesung
Minimalflächen und Differentialgeometrie

Aufgabe 25:

Wir betrachten wieder ein Ellipsoid $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$, mit $a, b, c > 0$. In Aufgabe 17 (a) wurde bereits der Tangentialraum $T_{(x,y,z)}E$ und der Normalraum $T^{\perp}_{(x,y,z)}E$ in einem beliebigen Punkt $(x, y, z) \in E$ berechnet. Nun gebe man im Fall $x = 0$ die Weingartenabbildung $L_{(0,y,z)} : T_{(0,y,z)}E \to T_{(0,y,z)}E$ explizit an und berechne mittels dieser die Hauptkrümmungsrichtungen und Hauptkrümmungen von E in einem beliebigen Punkt $(0, y, z) \in E$. (5)

Aufgabe 26:

Nun betrachten wir das einschalige Hyperboloid $H_c := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x^2 + y^2 - c^2 = z^2\}$ mit dem ,,Nackenradius" $c > 0$. In Aufgabe 17 (b) wurde bereits der Tangentialraum und der Normalraum in einem beliebigen Punkt $(x, y, z) \in H_c$ berechnet. Nun gebe man die Weingartenabbildung $L_{(x,y,z)} : T_{(x,y,z)}H_c \to T_{(x,y,z)}H_c$ explizit an und berechne mittels dieser die Hauptkrümmungsrichtungen und Hauptkrümmungen von H_c in (x, y, z). (5)

Aufgabe 27:

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^3$ die Parametrisierung einer regulären C^2-Fläche über einem glatt berandeten Gebiet Ω im $\mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft, dass sowohl deren mittlere Krümmung H als auch deren Gauss'sche Krümmung K in jedem Punkt von Ω verschwindet. Man zeige, dass dann $X(\Omega)$ in einer Ebene enthalten sein muss. (4)

Aufgabe 28:

a) Man gebe mit Hilfe der Aufgabe 24 (a) alle Elemente der Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(B)$ der Einheitskreisscheibe $B := B_1(0)$, d.h. alle biholomorphen Abbildungen f von B auf B, explizit an. (2)

b) Man gebe eine biholomorphe Abbildung c von der oberen Halbebene $\mathbb{H} := \{w \in \mathbb{C} | \Im(w) > 0\}$ auf B zusammen mit ihrer holomorphen Umkehrabbildung c^{-1} von B auf $\mathbb{H}$ (mit exakter Begründung) an. Lässt sich die Abbildung c auf $\mathbb{R}$ stetig fortsetzen ? Falls ja, worauf wird dann $\mathbb{R}$ von dieser Fortsetzung abgebildet ? (2)

c) Worauf bildet c diejenigen Geraden ab, welche parallel zur reellen bzw. zur imaginären Achse (in $\mathbb{H}$) verlaufen ? Man fertige hierzu eine grobe, anschauliche Skizze an ! (2)