Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

SS 2009
19.06.2009
Prof. Dr. U. Dierkes, Dr. R. Jakob

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Minimalflächen und Differentialgeometrie

Aufgabe 29:

a) Sei S eine n-dimensionale, mittels einer Einheitsnormalen N orientierte Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ und $z_0 \in S$ ein elliptischer Punkt. Man zeige, dass es dann ein $r > 0$ gibt, sodass entweder $\langle z - z_0, N(z)\rangle > 0$ oder < 0 für alle $z \in S \cap B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ gilt, also dass $S \cap B_r(z_0)$ nur auf einer Seite von $T_{z_0}S + z_0$ liegen kann. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage ? Falls nicht, so gebe man ein Gegenbeispiel an. (3)

b) Sei S nun zusätzlich kompakt und zusammenhängend. Man zeige, dass S genau dann nur aus elliptischen Punkten besteht, wenn deren Gauss-Krümmung K_S in keinem Punkt von S verschwindet. (3)

Aufgabe 30:

Man berechne alle Christoffel-Symbole 2. Art Γ^k_{ij} der Rotationsfläche Φ aus Aufgabe 11, also einer Parametrisierung der Form $\Phi(u^1, u^2) = (u^1, \zeta(u^1)\sin u^2, \zeta(u^1)\cos u^2)$, für ein $\zeta \in C^3([-R, R], \mathbb{R}_+)$. Wie lässt sich somit R_{1212} (von Φ) mittels ζ (und seinen Ableitungen) ausdrücken ? Können wir unser Ergebnis mit einem Resultat aus Aufgabe 11 vergleichen, also dessen Richtigkeit überprüfen ? (4)

Aufgabe 31:

a) Sei $X : \bar{B} \to \mathbb{R}^N$ eine Fläche von der Differenzierbarkeitsklasse $C^1(\bar{B})$ und $w_0 \in \partial B$ ein beliebig fixierter Punkt des Randes der Einheitskreisscheibe B. Man beweise nun, dass es eine Konstante $C(X) > 0$ gibt, sodass zu jedem $\delta \in (0, 1)$ eine Teilmenge $E \subset (\delta, \delta^{1/2})$ positiven $\mathcal{L}^1$-Masses existiert, sodass

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} |\frac{d}{dt}X(w_0 + \rho e^{it})|\, dt \leq \Big(\frac{C(X)}{\log(1/\delta)}\Big)^{1/2} |\theta_1 - \theta_2|^{1/2},$$

für alle $\rho \in E$ gilt, wobei $\theta_1(\rho) \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \theta_2(\rho)$ und die Winkel $\theta_1(\rho) < \theta_2(\rho)$ durch $\{w_0 + \rho e^{it} | t \in (\theta_1(\rho), \theta_2(\rho))\} = \partial B_\rho(w_0) \cap B$ bestimmt seien. Wovon hängt diese Konstante $C(X)$ präzise ab ? (Dies ist übrigens das Courant-Lebesgue-Lemma.) (5)

b) Lässt sich dieses Resultat auch auf Punkte $w_0 \in B$ sinnvoll verallgemeinern ? (1)

Hinweis: Man führe um w_0 Polarkoordinaten ein, berechne das Dirichletintegral von X auf Durchschnitten $B_r(w_0) \cap B$ in diesen Polarkoordinaten (Trafo-Satz und Fubini), rate $C(X)$ günstig und versuche mit diesem $C(X)$ einen Widerspruchsbeweis zu führen !

Aufgabe 32:

Sei Γ eine geschlossene Jordankurve in einem $\mathbb{R}^N$, d.h. das Bild einer injektiven und stetigen (und somit homöomorphen) Abbildung $\phi : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^N$. Zwei beliebige, verschiedene Punkte $x_1, x_2 \in \Gamma$ teilen Γ in zwei disjunkte, offene Teilbögen Γ_1, Γ_2 auf. Man beweise nun, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\eta > 0$ gibt, sodass für jedes Paar verschiedener Punkte $x_1, x_2 \in \Gamma$ mit Abstand $|x_1 - x_2|_{\mathbb{R}^N} < \eta$ einer der beiden Teilbögen $\operatorname{diam}(\Gamma_j) := \sup\{|x-y|_{\mathbb{R}^N} \mid x, y \in \Gamma_j\} < \epsilon$ erfüllt, also für $j = 1$ oder $j = 2$. (4)