Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

SS 2009
26.06.2009
Prof. Dr. U. Dierkes, Dr. R. Jakob

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Minimalflächen und Differentialgeometrie

Aufgabe 33:

Sei S eine n-dimensionale, mittels einer Einheitsnormalen N orientierte C^3-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$.

a) Man zeige zunächst, dass Kern $(DN(z)) \setminus T_zS \neq \emptyset$ ist, in jedem Punkt $z \in S$. Insbesondere ist also (die gesamte Jacobi-Matrix) $DN(z)$ (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar, mit mindestens einer 0 als Eigenwert, in jedem Punkt $z \in S$. (3)

b) Desweiteren zeige man, dass in einem Punkt $z^* \in S$ genau dann die Normale $N(z^*)$ in Kern $(DN(z^*)) \setminus T_{z^*}S$ enthalten ist, wenn (die gesamte Jacobi-Matrix) $DN(z^*)$ symmetrisch, also ein Element aus $\mathrm{Sym}(n+1,\mathbb{R})$ ist. (2)

Aufgabe 34:

Wir betrachten wieder einen 2-dimensionalen Torus S mit der Parametrisierung $\phi(u,v) := ((r + a\,\cos u)\cos v, (r + a\,\cos u)\sin v, a\,\sin u)$, für $u, v \in [0, 2\pi)$ und $r > a > 0$ fest, und auf diesem die Wege $\alpha^v(t) := \phi(t, v)$ und $\beta^u(t) := \phi(u, t)$, für festes v bzw. u. Entlang α^v existiert das Tangentenfeld $X^v(t) := \frac{d}{dt}\alpha^v(t)$ und entlang β^u das Tangentenfeld $Y^u(t) := \frac{d}{dt}\beta^u(t)$. Man berechne nun die kovarianten Ableitungen $\frac{D}{dt}X^v(t)$ und $\frac{D}{dt}Y^u(t)$, also die Anteile von $\frac{d}{dt}X^v(t)$ und $\frac{d}{dt}Y^u(t)$ in $T_{\alpha^v(t)}S$ bzw. $T_{\beta^u(t)}S$. Für welche Parameter v^* bzw. u^* aus $[0, 2\pi)$ gilt demnach $\frac{D}{dt}X^{v^*}(t) \equiv 0$ bzw. $\frac{D}{dt}Y^{u^*}(t) \equiv 0$ auf $[0, 2\pi)$? Eignen sich vielleicht gerade die Wege α^{v^*} bzw. β^{u^*} besonders gut, um zwei verschiedene Punkte auf dem Torus möglichst „schnell" miteinander zu verbinden ? (5)

Aufgabe 35:

a) Sei $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ eine Lösung von $\triangle u = 0$ auf einem Teilgebiet Ω eines $\mathbb{R}^N$. Man beweise, dass dann u für beliebige Bälle $B_R(x) \subset \Omega$ die Mittelwertformel

$$u(x) = \frac{1}{\mathcal{H}^{N-1}(\partial B_R(x))} \int_{\partial B_R(x)} u \, d\mathcal{H}^{N-1}$$

erfüllt, wobei $\mathcal{H}^{N-1}$ das $(N-1)$-dimensionale Hausdorff-Mass, also hier das gewöhnliche Oberflächenmass auf der Kugeloberfläche $\partial B_R(x)$ bedeutet. (4)
Hinweis: Man kombiniere die Voraussetzung $\triangle u = 0$ mit dem Gauss'schen Integralsatz auf Bällen $B_\rho(x) \subset B_R(x)$, führe um x Kugelkoordinaten ein und wende (sogar zweimal) den Transformationssatz an.

b) Für solche u leite man hieraus die Mittelwertformel

$$u(x) = \frac{1}{\mathcal{L}^N(B_R(x))} \int_{B_R(x)} u \, d\mathcal{L}^N$$

her. (1)

Aufgabe 36:

Sei $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R}) \cap C^0(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ eine Lösung von $\triangle u = 0$ auf einem beschränkten Teilgebiet Ω eines $\mathbb{R}^N$. Man beweise, dass dann u bereits konstant sein muss, falls u in einem (inneren) Punkt $x_0 \in \Omega$ entweder sein Maximum oder sein Minimum annimmt, also insbesondere dass

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| = \max_{\partial\Omega} |u|,$$

dass also u sowohl sein Minimum als auch sein Maximum auf dem Rand von Ω annimmt. Hinweis: Verwende die Mittelwertformel aus Aufgabe 35 (b) zusammen mit der Voraussetzung, dass Ω zusammenhängend sei ! (5)