Inhaltsverzeichnis

Differentialgeometrie II

Ruben Jakob

28. Januar 2010

1 Der Satz von Gauss-Bonnet

1.1 Integration über Untermannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt erinnern wir an die Begriffe der Lebesgue-Integrierbarkeit und des „Flächen"-Integrals von Funktionen $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einer n-dimensionalen Untermannigfaltigkeit S des $\mathbb{R}^{n+1}$ der Klasse C^1. Wir betrachten hierzu zunächst eine C^1-Parametrisierung $\Phi : V \stackrel{\cong}{\longrightarrow} U$ einer offenen Teilmenge U von S, über $V \subset \mathbb{R}^n$ offen, zusammen mit den Koeffizienten g_{ij} ihrer ersten Fundamentalform und definieren:

Definition 1.1.1 *Eine Funktion $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ mit supp$(f) \subset U$ heisse über S Lebesgue-integrierbar, geschrieben $f \in L^1(S, \mathrm{vol}_S)$, falls das Produkt $(f \circ \Phi)\sqrt{\det(g_{ij})}$ über V $\mathcal{L}^n$-summierbar ist, d.h. falls das Lebesgue-Integral $\int_V (f \circ \Phi)\sqrt{\det(g_{ij})}\, d\mathcal{L}^n$ existiert und endlich ist, und wir setzen:*

$$\int_S f\, d\mathrm{vol}_S := \int_V f \circ \Phi \sqrt{\det(g_{ij})}\, d\mathcal{L}^n. \tag{1.1}$$

Man beachte hierbei, dass die $\mathcal{L}^n$-Summierbarkeit einer Funktion $g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ über eine offene Teilmenge V des $\mathbb{R}^n$ bereits die $\mathcal{L}^n$-Summierbarkeit ihres Betrages $\mid g \mid$, also die Existenz und Endlichkeit des Lebesgue-Integrals $\int_V \mid g \mid d\mathcal{L}^n$ impliziert. Somit ist also ein $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ mit supp$(f) \subset U$ genau dann ein Element von $L^1(S, vol_S)$, wenn $\mid f \mid \in L^1(S, vol_S)$ ist.

Das in (1.1) verwendete Maß $\sqrt{\det(g_{ij})}\, \mathcal{L}^n$ auf V ist tatsächlich geeignet, um den „Flächen"-Inhalt der durch die Parametrisierung Φ verzerrten Teilmenge $U = \Phi(V)$ von S oder - allgemeiner - um das Mass/Integral einer Funktion f über U zu bestimmen, wie die folgende Invarianz unter Parameterwechsel $\Phi \mapsto \tilde{\Phi}$ lehrt:

Proposition 1.1.1 *Es mögen zwei offene „Karten" U und $\tilde{U} \subset S$ mit $U \cap \tilde{U} \neq \emptyset$ durch Diffeomorphismen $\Phi : V \stackrel{\cong}{\longrightarrow} U$ und $\tilde{\Phi} : \tilde{V} \stackrel{\cong}{\longrightarrow} \tilde{U}$ parametrisiert werden. So gilt für eine beliebige Funktion $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ mit supp$(f) \subset U \cap \tilde{U}$:*
Es ist genau dann $(f \circ \Phi)\sqrt{\det(g_{ij})}$ über V $\mathcal{L}^n$-summierbar, wenn $(f \circ \tilde{\Phi})\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}$ über $\tilde{V}$ $\mathcal{L}^n$-summierbar ist, und in diesem Fall

$$\int_V (f \circ \Phi)\sqrt{\det(g_{ij})}\, d\mathcal{L}^n = \int_{\tilde{V}} (f \circ \tilde{\Phi})\sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}\, d\mathcal{L}^n.$$

Beweis: Es ist per Definition $(g_{ij}) = (D\Phi)^T \circ D\Phi$. Mittels der sogenannten „Parametertransformation" $\varphi := \tilde{\Phi}^{-1} \circ \Phi : \Phi^{-1}(U \cap \tilde{U}) \longrightarrow (\tilde{\Phi})^{-1}(U \cap \tilde{U})$ sehen wir also nach

Anwendung der Kettenregel auf $\Phi \equiv \tilde{\Phi} \circ \varphi$:

$$(g_{ij}) = (D\Phi)^T \cdot D\Phi = (D(\tilde{\Phi} \circ \varphi))^T \cdot D(\tilde{\Phi} \circ \varphi) = ((D\tilde{\Phi} \circ \varphi) \cdot D\varphi)^T \cdot (D\tilde{\Phi} \circ \varphi) \cdot D\varphi = D\varphi^T \cdot (\tilde{g}_{ij} \circ \varphi) \cdot D\varphi,$$

und somit $\sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi)} \mid \det(D\varphi) \mid$. Der klassische Transformationssatz der Lebesgue-Theorie lehrt nun bei Beachtung der Voraussetzung $\mathrm{supp}(f) \subset U \cap \tilde{U}$: Ist OBDA $(f \circ \tilde{\Phi}) \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}$ über $\tilde{V}$ $\mathcal{L}^n$-summierbar, so auch $(f \circ \tilde{\Phi} \circ \varphi) \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij} \circ \varphi)}$ $\mid \det(D\varphi) \mid$, also $(f \circ \Phi) \sqrt{\det(g_{ij})}$ über V, und es ist:

$$\int_{\tilde{V}} (f \circ \tilde{\Phi}) \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij})}\, d\mathcal{L}^n = \int_V (f \circ \tilde{\Phi} \circ \varphi) \sqrt{\det(\tilde{g}_{ij}) \circ \varphi} \mid \det(D\varphi) \mid \, d\mathcal{L}^n = \int_V (f \circ \Phi) \sqrt{\det(g_{ij})}\, d\mathcal{L}^n.$$

◇

Der nun als sinnvoll nachgewiesene Begriff der Lebesgue-Integrierbarkeit von Funktionen f über S mit nur „kleinen" Trägern $\mathrm{supp}(f) \subset U \subset S$ aus Definition 1.1.1 muss nun noch auf beliebige Funktionen $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ erfolgreich verallgemeinert werden. Sei hierzu $\mathcal{U} := \{U_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine Überdeckung von S durch Karten und $\{\eta_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ eine $\mathcal{U}$-untergeordnete „Zerlegung der Eins", d.h. es seien $\eta_i \in C_c^0(U_i, [0, 1])$, sodass
i) jeder Punkt aus S eine Umgebung besitzt, die mit nur endlich vielen Trägern $\mathrm{supp}(\eta_i)$ einen nicht-leeren Durchschnitt hat und
ii) $\sum_{i\in\mathbb{N}} \eta_i(z) = 1$ für jedes $z \in S$ gilt.
Die Existenz solch einer „Zerlegung der 1" ist äquivalent zur sogenannten *Parakompaktheit* von S (siehe hierzu [6], S.152–155 oder [4], S. 301). Da nach dem berühmten Satz von Stone glücklicherweise bereits jeder metrisierbare Raum parakompakt ist (siehe hierzu [4], S. 280 und S. 300), sind somit jeder $\mathbb{R}^n$ und auch all seine (automatisch wieder metrisierbaren) Teilräume – insbesondere also alle Untermannigfaltigkeiten eines $\mathbb{R}^n$ – parakompakt.
Für eine beliebige Funktion $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt nun in der Tat $\mathrm{supp}(f\eta_i) \subset U_i$, sodass wir Definition 1.1.1 zumindest für Funktionen mit nicht-negativen Werten wie folgt verallgemeinern können:

Definition 1.1.2 *Eine Funktion $f : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$ heisse über S Lebesgue-integrierbar, falls die Produkte $f\eta_i$ (im Sinne von Definition 1.1.1) über S Lebesgue-integrierbar sind und die Summe $\sum_{i\in\mathbb{N}} \int_S f\eta_i \,\mathrm{dvol}_S < \infty$ ist. In diesem Fall definieren wir deren „Flächen"-Integral durch*

$$\int_S f \,\mathrm{dvol}_S := \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_S f\eta_i \,\mathrm{dvol}_S.$$

Mittels des Konvergenz-Satzes von B. Levi aus der Lebesgue-Theorie und des Umordnungssatzes für absolut konvergente Reihen von Dirichlet kann nun folgende Proposition gezeigt werden:

Proposition 1.1.2 *Seien $\{\eta_i^1\}_{i\in\mathbb{N}}$ und $\{\eta_j^2\}_{j\in\mathbb{N}}$ zwei beliebige Zerlegungen der Eins auf S und erfülle $f : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$ entweder $\sum_{i\in\mathbb{N}}\int_S f\eta_i^1 \,\mathrm{dvol}_S < \infty$ oder $\sum_{j\in\mathbb{N}}\int_S f\eta_j^2 \,\mathrm{dvol}_S < \infty$, so gilt bereits*

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\int_S f\eta_i^1 \,\mathrm{dvol}_S = \sum_{j\in\mathbb{N}}\int_S f\eta_j^2 \,\mathrm{dvol}_S.$$

Beweis: Übungsaufgabe !

◇

Aus dieser Unabhängigkeit von der gewählten Zerlegung der Eins auf S folgt die Wohldefiniertheit des Integrals $\int_S f\, dvol_S$ für nicht-negative Funktionen f auf S.

Schließlich definieren wir noch in

Definition 1.1.3 *Wir definieren das ,,Flächen"-Integral über eine beliebige Borel-Teilmenge $R \subset S$ einer Funktion $f : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$ durch*

$$\int_R f \,\mathrm{dvol}_S := \int_S f\,\chi_R \,\mathrm{dvol}_S,$$

falls $f\,\chi_R$ im Sinne von Definition 1.1.2 über S Lebesgue-integrierbar ist, wobei die charakteristische Funktion $\chi_R \equiv 1$ auf R sei und auf $S \setminus R$ identisch verschwinde.

Somit können wir schliesslich für eine beliebige Borel-messbare Funktion $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ (sodass also insbesondere $\{f \geq 0\}$ und $\{f \leq 0\}$ Borel-Teilmengen von S sind) deren ,,Flächen"-Integral über beliebige Borel-Teilmengen $R \subset S$ durch

$$\int_R f\, dvol_S := \int_{R\cap\{f\geq 0\}} f\, dvol_S - \int_{R\cap\{f\leq 0\}} (-f)\, dvol_S$$

wohl-definieren, falls diese beiden Integrale im Sinne von Definition 1.1.3 existieren und somit insbesondere endlich sind. In diesem Falle nennen wir die Funktion f von der Klasse $L^1(R, vol_S)$. Man beachte, dass per dieser Definition bereits $\int_R \mid f \mid dvol_S$ für jedes f aus $L^1(R, vol_S)$ existiert und insbesondere endlich ist.

1.2 Lokale und globale Version des Satzes von Gauss-Bonnet

Wir betrachten in diesem Abschnitt wie in Satz 8.5 aus Diffgeo I eine zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit S des $\mathbb{R}^3$ der Klasse C^7 und statten eine Normalumgebung $U \subset S$ eines festen Punktes $z_0 \in S$ mittels der ,,Exponentialparametrisierung" $\Phi : (0, r_0) \times [0, 2\pi) \xrightarrow{\cong} U \setminus \{z_0\}$, also mittels $\Phi(r, \phi) := \exp_{z_0}(r\,(X\cos(\phi) + Y\sin(\phi)))$, mit geodätischen Polarkoordinaten aus. Hierbei sei $\{X, Y\}$ eine beliebig gewählte Orthonormalbasis von $T_{z_0}S$ bzgl. des euklidischen Skalarprodukts $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3}$. Da wir durch (genau) eine orientierungstreue Isometrie O (= eine Verkettung einer Drehung mit einer Translation) des ($\mathbb{R}^3$, $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3}$) den Tangentialraum $T_{z_0}S$ auf den $\mathbb{R}^2$ abbilden können, welche gerade $O(X) = (1, 0)$ und $O(Y) = (0, 1)$ erfüllt, können wir im Folgenden – wie auch bereits in Satz 8.5 – der Einfachheit halber mit der Exp-Parametrisierung $\Phi(r, \phi) := \exp_{z_0}(r\,(\cos(\phi) + i\sin(\phi)))$ rechnen. In jenem Satz 8.5 bewiesen wir u.a., dass für die Koeffizienten g_{ij} der ersten Fundamentalform von Φ $g_{11} \equiv 1$, $g_{12} \equiv 0 \equiv g_{21}$ und $g_{22} = \lambda^2$ für ein $\lambda \in C^3([0, r_0) \times [0, 2\pi))$ gilt, also insbesondere dass die beiden Vektoren

$$E_1(z) := \frac{\partial}{\partial r}(\exp_{z_0}(re^{i\phi})), \quad E_2(z) := \lambda^{-1}\frac{\partial}{\partial \phi}(\exp_{z_0}(re^{i\phi}))$$

eine Orthonormalbasis des Tangentialraums $(T_zS, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3})$ zum Punkt $z = \Phi(r, \phi) \in U \setminus \{z_0\}$ bilden. Wir ergänzen diese durch $N(z) := E_1(z) \times E_2(z)$ zu einer Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ (bzgl. $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3}$). Man beachte, dass sich N zu einem Einheits-Normalenfeld an S auf ganz U stetig (in z_0 hinein) fortsetzen lässt.
Sei nun $\gamma(t) = (r(t), \phi(t))$ eine reguläre geschlossene Kurve der Klasse C^2 in $(0, r_0) \times [0, 2\pi)$ und $\alpha(t) := \Phi(\gamma(t))$ die entsprechende C^2-Kurve in $U \setminus \{z_0\}$. Wir betrachten ihr begleitendes Zweibein $e_1(t) := \dot{\alpha}(t)$, $e_2(t) := N(\alpha(t)) \times e_1(t)$ und definieren die sogenannte geodätische Krümmung k_g von α (bezüglich S mit Orientierung N) durch

$$k_g(t) := \langle \frac{De_1}{dt}, e_2\rangle(t) \equiv \langle \ddot{\alpha}, N(\alpha) \times \dot{\alpha}\rangle(t). \tag{1.2}$$

Ausserdem benötigen wir noch

Definition 1.2.1 *Sei A eine kompakte, einfach-zusammenhängende Teilmenge (mit $\mathring{A} \neq \emptyset$) einer Normalumgebung U eines Punktes z_0 von S, welche von einer regulären Jordan-Kurve α der Klasse C^2 berandet werde. Wir nennen α positiv orientiert bzgl. A, falls die Kurve $\gamma := \exp_{z_0}^{-1}(\alpha)$ positiv orientiert bzgl. $\tilde{A} := \exp_{z_0}^{-1}(A) \subset T_{z_0}S$ ist, d.h. falls der zu $\dot{\gamma}(t)$ orthogonale Vektor $N(z_0) \times \dot{\gamma}(t)$ für jedes t ins Innere von $\tilde{A}$ hineinweist, also falls $\tilde{A}$ zu jedem Zeitpunkt auf der linken Seite eines Beobachters liegt, welcher $\tilde{A}$ gemäss der Parametrisierung γ umkreist. Andernfalls heisse α negativ orientiert bzgl. A.*

Setzen wir noch $\dot{r}^2 + \dot{\phi}^2\lambda^2 = \mid \dot{\alpha} \mid^2 \equiv 1$ voraus, so existiert eine Funktion $\vartheta \in C^1(\mathbb{R})$, welche

$$e_1(t) = \cos(\vartheta(t))E_1(\alpha(t)) + \sin(\vartheta(t))E_2(\alpha(t)) \tag{1.3}$$

erfüllt und durch die Angabe von $\vartheta(0)$ bereits eindeutig durch α bestimmt ist (man siehe hierzu beispielsweise Lemma 2.2.1 in [2] und unsere Übungsaufgabe 7 für den Fall ebener Kurven). Anwendung von $N(\alpha(t)) \times \cdot$ liefert somit

$$e_2(t) = \cos(\vartheta(t))E_2(\alpha(t)) - \sin(\vartheta(t))E_1(\alpha(t)). \tag{1.4}$$

Wir kommen hiermit zunächst zu

Lemma 1.2.1 *Falls die geschlossene C^2-Kurve $\alpha(t) = \Phi(r(t), \phi(t))$ nach ihrer Bogenlänge parametrisiert ist, also $\dot{r}^2 + \dot{\phi}^2\lambda^2 = \mid \dot{\alpha} \mid^2 \equiv 1$ erfüllt, so gilt die Beziehung $k_g(t) = \dot{\vartheta}(t) + \frac{\partial \lambda}{\partial r}(r(t), \phi(t))\,\dot{\phi}(t)$, $\forall\, t \in [0, L]$, wobei L die Länge des Weges α bezeichne.*

Beweis: Wir berechnen anhand von

$$\langle \frac{DE_1}{dt}, E_1\rangle(\alpha(t)) \equiv 0 \equiv \langle \frac{DE_2}{dt}, E_2\rangle(\alpha(t)), \qquad \langle \frac{DE_2}{dt}, E_1\rangle(\alpha(t)) \equiv -\langle \frac{DE_1}{dt}, E_2\rangle(\alpha(t)),$$

sowie aus (1.2), (1.3) und (1.4):

$$\begin{aligned} k_g(t) = \langle \frac{De_1}{dt}, e_2\rangle(t) &= \dot\vartheta\, \langle -\sin(\vartheta)\, E_1(\alpha) + \cos(\vartheta)\, E_2(\alpha), e_2\rangle(t) \\ &\quad + \cos(\vartheta)\langle \frac{DE_1(\alpha)}{dt}, e_2\rangle(t) + \sin(\vartheta)\, \langle \frac{DE_2(\alpha)}{dt}, e_2\rangle(t) \\ &= \dot\vartheta(t) + \cos^2(\vartheta)\langle \frac{DE_1}{dt}, E_2\rangle(\alpha(t)) - \sin^2(\vartheta)\langle \frac{DE_2}{dt}, E_1\rangle(\alpha(t)) \\ &= \dot\vartheta(t) + \langle \frac{DE_1}{dt}, E_2\rangle(\alpha(t)), \end{aligned} \tag{1.5}$$

$\forall\, t \in [0, L]$. Weiterhin erhalten wir aus Formel (1.2) aus Kapitel 8 von Diffgeo I in Anwendung auf das Tangentialvektorfeld $E_1(\alpha)(t) \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial r}(\gamma(t))$ (sodass hier einfacherweise $w \equiv (1, 0)$ ist) entlang der Kurve $\alpha = \Phi(\gamma)$, mit $\gamma(t) = (r(t), \phi(t))$:

$$\frac{DE_1(\alpha(t))}{dt} = \sum_{j=1}^{2} [\Gamma^1_{1j}(\gamma(t))\, \dot\gamma^j\, E_1(\alpha(t)) + \Gamma^2_{1j}(\gamma(t))\, \dot\gamma^j\, \lambda E_2(\alpha(t))],$$

also $\langle \frac{DE_1}{dt}, E_2\rangle(\alpha(t)) = \sum_{j=1}^2 \Gamma^2_{1j}(\gamma(t))\, \dot\gamma^j\, \lambda(\gamma(t))$. Aus Satz 8.5 von Diffgeo I und dessen Beweis wissen wir, dass $\Gamma^2_{11} \equiv 0$ und $\Gamma^2_{12} = \lambda^{-1}\frac{\partial \lambda}{\partial r}$ ist, sodass wir schliesslich

$$\langle \frac{DE_1}{dt}, E_2\rangle(\alpha(t)) = \lambda^{-1}\frac{\partial \lambda}{\partial r}(\gamma(t))\, \dot\gamma^2\, \lambda(\gamma(t)) = \frac{\partial \lambda}{\partial r}(\gamma(t))\, \dot\phi(t),$$

also zusammen mit (1.5) das erwünschte Resultat erhalten.

$\diamond$

Sowohl für den Beweis des folgenden Lemmas als auch von Lemma 1.2.3 werden wir folgende nützliche Homotopie $H : V \times [0, 1] \to \mathbb{R}^3$ von $V := \exp_{z_0}^{-1}(U) \subset T_{z_0}S$ nach $\mathbb{R}^3$, welche durch

$$H_s(v) := \begin{cases} z_0 + \frac{\exp_{z_0}(sv) - z_0}{s} & : \ s \in (0, 1] \\ z_0 + v & : \ s = 0 \end{cases}$$

definiert sei, benötigen. Die Homotopie H ,,verbindet" also die Abbildungen $H_1 = \exp_{z_0}$ und $H_0 = z_0 + id_V$ miteinander und ist zusammen mit ihrer totalen Ableitung $D_v H_s$ auf ganz $V \times [0, 1]$ stetig, denn

$$\lim_{s \to 0} H_s(v) = z_0 + \frac{d}{ds}\exp_{z_0}(sv)|_{s=0} = z_0 + D_v \exp_{z_0}(0)v = z_0 + v = H_0(v),$$

$$\text{und} \qquad \lim_{s \to 0} D_v H_s(v) = \lim_{s \to 0} D_v(\exp_{z_0})(sv)\frac{s}{s} = D_v \exp_{z_0}(0) = id_{T_{z_0}S} = D_v H_0(v),$$

für jedes $v \in V$, da wir $D_v \exp_{z_0}(0) = id_{T_{z_0}S}$ im letzten Semester bereits berechneten.

Lemma 1.2.2 (Hopfscher Umlaufsatz) *Sei $\alpha(t) = \Phi(r(t), \phi(t))$ (wie in Lemma 1.2.1) eine nach Bogenlänge parametrisierte, geschlossene C^2-Kurve in $U \setminus \{z_0\} \subset S$ und $\vartheta \in C^1([0, L])$ ihre Winkel-Funktion wie in (1.3) und (1.4).*
i) So ist die Zahl $n_\alpha := \frac{1}{2\pi}(\vartheta(L) - \vartheta(0)) \in \mathbb{Z}$ und misst gerade die Anzahl der Rotationen der Tangente $\dot{\alpha}$ von α auf dem Intervall $[0, L]$, unter Berücksichtigung der Orientierung von S.
*ii) Falls α eine geschlossene C^2-*Jordan-*Kurve, also zusätzlich* injektiv *ist, so gilt $n_\alpha = \pm 1$, also $\vartheta(L) - \vartheta(0) = \pm 2\pi$, in Abhängigkeit von der Orientierung von α bzgl. der umschlungenen, kompakten Teilmenge $\overline{\mathrm{Int}(\alpha)} \subset U \setminus \{z_0\}$.*

Beweis: Wie in Aufgabe 7, also im Fall planarer, geschlossener Kurven ergibt sich aus der Eigenschaft (1.3) der Winkelfunktion ϑ von α zusammen mit $\dot{\alpha}(0) = \dot{\alpha}(L)$, dass $\eta_\alpha := \frac{1}{2\pi}(\vartheta(L) - \vartheta(0))$ eine ganze Zahl ist, welche gerade die Anzahl der Rotationen von $\dot{\alpha}$ (unter Berücksichtigung der Orientierung von α bzw. U) zählt, während t von 0 nach L läuft. Ist nun $\gamma := \exp_{z_0}^{-1}(\alpha) : [0, L] \to V$, so betrachten wir deren Homotopien $\gamma_s := H_s(\gamma)$, für die oben eingeführte Homotopie H – sodass also insbesondere $\gamma_0 = z_0 + \gamma$ und $\gamma_1 = \alpha$ gilt – zusammen mit ihren Winkelfunktionen ϑ_s in Bezug auf die Einheits-Tangential-Vektorfelder

$$E_{1s}(H_s(r\,(\cos(\phi)X + \sin(\phi)Y))) := \frac{\frac{\partial}{\partial r} H_s(r\,(\cos(\phi)X + \sin(\phi)Y))}{|\frac{\partial}{\partial r} H_s(r\,(\cos(\phi)X + \sin(\phi)Y))|} \qquad \text{und}$$

$$E_{2s}(H_s(r\,(\cos(\phi)X + \sin(\phi)Y))) := \frac{\frac{\partial}{\partial \phi} H_s(r\,(\cos(\phi)X + \sin(\phi)Y))}{|\frac{\partial}{\partial \phi} H_s(r\,(\cos(\phi)X + \sin(\phi)Y))|},$$

jeweils an die Untermannigfaltigkeit $H_s(V)$ des $\mathbb{R}^3$, für jedes s. Es ist also insbesondere $\vartheta_1 = \vartheta$ die Winkelfunktion zu α und ϑ_0 diejenige zu $\gamma_0 = z_0 + \gamma$. Wir erhalten somit für jedes $s \in [0, 1]$:

$$\eta_{\gamma_s} := \frac{1}{2\pi}(\vartheta_s(L) - \vartheta_s(0)) \in \mathbb{Z}.$$

Da die rechte Seite stetig in s variiert, muss η_{γ_s} konstant sein, also insbesondere $\eta_\alpha = \eta_{\gamma_1} = \eta_{\gamma_0} = \eta_\gamma$ gelten. Ist nun α eine geschlossene C^2-*Jordan*-Kurve, so auch γ bzw. γ_0, und es folgt wie in unserer Übungsaufgabe 7, also aus der von γ_0 und ϑ_0 erfüllten Gleichung

$$\frac{\dot{\gamma}_0(t)}{|\dot{\gamma}_0(t)|} = \cos(\vartheta_0(t))(\cos(\phi(t))X + \sin(\phi(t))Y) + \sin(\vartheta_0(t))(-\sin(\phi(t))X + \cos(\phi(t))Y) \tag{1.6}$$

mittels Koeffizienten- bzw. „Winkel"-Vergleich zu den beiden Zeitpunkten $t = 0$ und $t = L$, dass $\eta_\gamma = \frac{1}{2\pi}(\vartheta_0(L) - \vartheta_0(0)) = \pm 1$ sein muss, in Abhängigkeit davon, ob die Kurve γ das Gebiet *Int*$(\gamma) \subset T_{z_0}S \setminus \{0\}$ im positiven oder negativen Sinne umläuft. Hierbei ist $\phi(t)$ die zweite, also „Winkel"-Koordinate der Polarkoordinaten $(r(t), \phi(t)) = (\Phi)^{-1}(\alpha(t))$, d.h. $\gamma(t) = r(t)(\cos(\phi(t))X + \sin(\phi(t))Y)$. Somit erhalten wir also $\eta_\alpha = \pm 1$, in Abhängigkeit davon, ob α das Gebiet *Int*(α) im positiven oder negativen Sinne umläuft. (Man siehe zu diesem Beweis auch S. 42–52, insbesondere Lemma 2.2.1 und Satz 2.2.2 in [2].)

◇

Hiermit können wir nun endlich beweisen:

Theorem 1.2.1 (Lokale Version des Satzes von Gauss-Bonnet) *Sei A eine einfach-zusammenhängende Teilmenge der punktierten Normalumgebung $U\backslash\{z_0\} = \exp_{z_0}(B^2_{r_0}(0)\backslash\{0\})$ eines Punktes $z_0 \in S$ mit C^2-Rand ∂A und α eine reguläre, bzgl. A positiv orientierte C^2-Parametrisierung von ∂A nach deren Bogenlänge. Dann gilt für die Gauss'sche Krümmung K_S von S und die geodätische Krümmung k_g von α:*

$$\int_A K_S \, dvol_S = 2\pi - \int_0^L k_g(t)\, dt.$$

Beweis: Wir setzen wieder $\Phi(r,\phi) := \exp_{z_0}(re^{i\phi})$. Nach Satz 8.5 in Diffgeo I gilt $\det(g_{ij}) = \lambda^2$ und ausserdem $K_S(\Phi(r,\phi)) = -\frac{\lambda_{rr}}{\lambda}(r,\phi)$ für die Gauss'sche Krümmung K_S im Punkt $\Phi(r,\phi)$, wobei wieder λ die Wurzel des Koeffizienten g_{22} der ersten Fundamentalform von Φ bezeichne. Ist $V := \Phi^{-1}(A) \subset (0,r_0)\times[0,2\pi)$, so liefert also $(r(t),\phi(t)) := \Phi^{-1}(\alpha(t))$ eine reguläre, bezüglich V positiv orientierte C^2-Parametrisierung von ∂V, und wir erhalten aus der 2-dimensionalen Fassung des Gauss'schen Integralsatzes und Lemma 1.2.1:

$$\int_A K_S\, dvol_S = -\int_V \frac{\lambda_{rr}}{\lambda}(r,\phi)\sqrt{\det(g_{ij})}\, d(r,\phi)$$
$$= -\int_V \lambda_{rr}(r,\phi)\, d(r,\phi) = -\int_{\partial V} \lambda_r(r,\phi)\, d\phi = -\int_0^L \lambda_r(r(t),\phi(t))\,\dot\phi(t)\, dt$$
$$= -\int_0^L k_g(t)\, dt + \int_0^L \dot\vartheta(t)\, dt,$$

für die Winkel-Funktion ϑ der Kurve α bzgl. der Parametrisierung Φ, wie in (1.3) und (1.4). Da nun α eine *injektive*, reguläre, bzgl. *A positiv orientierte* C^2-Parametrisierung des *einfach geschlossenen* Weges ∂A ist, erhält man aus dem obigen „Hopfschen Umlaufsatz" für Jordan-Kurven auf 2-dim. Mannigfaltigkeiten:

$$\int_0^L \dot\vartheta(t)\, dt = \vartheta(L) - \vartheta(0) = 2\pi.$$

Insgesamt folgt also wie erwünscht: $\int_A K_S\, dvol_S = -\int_0^L k_g(t)\, dt + 2\pi$.

◇

Um dieses Resultat auf beliebige kompakte, m-fach zusammenhängende Teilmengen 2-dimensionaler Mannigfaltigkeiten S zu verallgemeinern, benötigen wir zunächst eine Verallgemeinerung des obigen Satzes auf einfach-zusammenhängende, nur stückweise glatt berandete Teilmengen von S und die folgenden Definitionen.

Definition 1.2.2 *Sei S eine durch N orientierte, 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ der Klasse C^2.*

i) Wir nennen eine rektifizierbare Jordan-Kurve in S, der Länge L, stückweise glatt (und nach ihrer Bogenlänge parametrisiert), falls sie eine Parametrisierung $\alpha \in C^0([0,L],S)$ besitzt, für welche eine endliche Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} = L$ von $[0,L]$ existiert, sodass $\alpha\mid_{[t_i,t_{i+1}]}$ von der Klasse C^2 und $\mid \dot{\alpha} \mid = 1$ auf $[t_i, t_{i+1}]$, für $i = 0,\ldots,k$, ist. Wir nennen die Punkte $\alpha(t_i)$, $i = 0,\ldots,k+1$, die Ecken und die Einschränkungen $\alpha\mid_{[t_i,t_{i+1}]}$ die (glatten) Bögen von α.
ii) Wir nennen eine kompakte Teilmenge $R \subset S$ (mit $\mathring{R} \neq \emptyset$) m-fach zusammenhängend, $m \in \mathbb{N}_0$, mit stückweise glattem Rand ∂R, falls der topologische Rand ∂R eine disjunkte Vereinigung aus m geschlossenen, stückweise glatten Jordan-Kurven ist. Im Fall $\partial R = \emptyset$ ist $m = 0$.
iii) Wir nennen eine (stückweise) reguläre Parametrisierung α einer solchen stückweise glatten Komponente von ∂R positiv orientiert bzgl. R, falls die Menge R zu jedem Zeitpunkt $t \notin \{t_0,\ldots,t_k\}$ auf der linken Seite eines Beobachters liegt, welcher sich gemäss der Parametrisierung α auf ∂R fortbewegt, d.h. falls $N(\alpha(t)) \times \dot{\alpha}(t)$ zu jedem Zeitpunkt $t \notin \{t_0,\ldots,t_k\}$ ins Innere $\mathring{R}$ von R hineinweist. Andernfalls heisse α negativ orientiert bzgl. R.
iv) In einer Ecke $z = \alpha(t_i)$ von ∂R zwischen zwei Bögen $\alpha\mid_{[t_{i-1},t_i]}$ und $\alpha\mid_{[t_i,t_{i+1}]}$ definieren wir den ,,Aussenwinkel" $\vartheta_i \equiv \vartheta(\alpha(t_i)) \in (-\pi,\pi)$ von ∂R als den betragsmässig kleineren Winkel zwischen den beiden Tangentialvektoren $\dot{\alpha}(t_i+) := \lim_{t\searrow t_i} \frac{\alpha(t)-\alpha(t_i)}{t-t_i}$ und $\dot{\alpha}(t_i-) := \lim_{t\nearrow t_i} \frac{\alpha(t_i)-\alpha(t)}{t_i-t}$ in T_zS. Wegen $\dot{\alpha}(t_i\pm) \in T_zS$ und $\mid \dot{\alpha}(t_i\pm) \mid = 1$ erfüllt ϑ_i somit insbesondere

$$\dot{\alpha}(t_i+) = \cos(\vartheta_i)\dot{\alpha}(t_i-) + \sin(\vartheta_i)N(\alpha(t_i)) \times \dot{\alpha}(t_i-) = \cos(\vartheta_i)e_1(t_i-) + \sin(\vartheta_i)e_2(t_i-). \tag{1.7}$$

ϑ_i misst also die spontane Richtungsänderung von $\dot{\alpha}$ an der Ecke $z = \alpha(t_i)$ von ∂R.

Einer nur stückweise glatten, nach ihrer Bogenlänge parametrisierten, geschlossenen Kurve $\alpha(t) = \Phi(r(t),\phi(t))$ in einer Normalumgebung $U \setminus \{z_0\} \subset S$ kann nun ebenfalls gemäss der Vorschrift (1.3) bzw. (1.4) eine ,,Winkel-Funktion" ϑ zugeordnet werden, welche nun jedoch nur noch eine stückweise C^1-Funktion sein kann. D.h. falls zu $\alpha \in C^0([0,L],S)$ eine endliche Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} = L$ von $[0,L]$ existiert, sodass $\alpha\mid_{[t_i,t_{i+1}]}$ von der Klasse C^2 ist, so ist $\vartheta \in L^\infty([0,L])$ mit $\vartheta\mid_{[t_i,t_{i+1}]}$ von der Klasse C^1, für jedes $i = 0,\ldots,k$. Zudem ordne man der Kurve α die Menge der Aussenwinkel $\vartheta_i \equiv \vartheta(\alpha(t_i)) \in (-\pi,\pi)$ (nach Definition 1.2.2, (iv)) an ihren $k+1$ Ecken $\alpha(t_i)$, für $i = 0,\ldots,k$, zu. Nun liegt es nahe, wiederum mittels der oben angegebenen Homotopie die folgende Verallgemeinerung des Hopfschen Umlaufsatzes, Lemma 1.2.2 (ii), auf solche nur stückweise glatte, geschlossene Jordan-Kurven auf S zu beweisen:

Lemma 1.2.3 *Sei $\alpha(t) = \Phi(r(t),\phi(t))$ eine nach Bogenlänge parametrisierte, geschlossene, (nach Definition 1.2.2) stückweise glatte Jordan-Kurve in einer punktierten Normalumgebung $U \setminus \{z_0\} \subset S$, mit $\alpha\mid_{[t_i,t_{i+1}]}$ von der Klasse C^2 für eine endliche Zerlegung $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k+1} = L$ von $[0,L]$, desweiteren $\vartheta \in L^\infty([0,L])$ ihre stückweise stetig differenzierbare Winkel-Funktion wie in (1.3) und (1.4), und seien $\vartheta_i \equiv \vartheta(\alpha(t_i)) \in (-\pi,\pi)$ die Aussenwinkel an ihren Ecken $\alpha(t_i)$, für $i = 0,\ldots,k$. So* *gilt*

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\vartheta} dt + \sum_{i=0}^{k} \vartheta_i = \pm 2\pi, \tag{1.8}$$

in Abhängigkeit von der Orientierung von α bzgl. der umschlungenen, kompakten Teilmenge $\overline{\mathrm{Int}(\alpha)} \subset U \setminus \{z_0\}$.

Beweis: Es existiert genau ein Winkel $\theta_0 \in [0, 2\pi)$, sodass

$$\dot{\alpha}(0+) = \cos(\theta_0) E_1(\alpha(0)) + \sin(\theta_0) E_2(\alpha(0)). \tag{1.9}$$

Nun lassen wir t von 0 nach t_1 gehen, während dessen die Winkelfunktion $\vartheta(t)$ einen Zuwachs von $\int_0^{t_1} \dot{\vartheta} dt$ erfährt, sodass wir

$$\dot{\alpha}(t_1-) = \cos(\theta_0 + \int_0^{t_1} \dot{\vartheta} dt) E_1(\alpha(t_1)) + \sin(\theta_0 + \int_0^{t_1} \dot{\vartheta} dt) E_2(\alpha(t_1))$$

erhalten. Der ,,Sprung" der Tangente $\dot{\alpha}$ in der Ecke $\alpha(t_1)$ von $\dot{\alpha}(t_1-)$ nach $\dot{\alpha}(t_1+)$ um den Aussenwinkel ϑ_1 ergibt nun

$$\dot{\alpha}(t_1+) = \cos(\theta_0 + \int_0^{t_1} \dot{\vartheta} dt + \vartheta_1) E_1(\alpha(t_1)) + \sin(\theta_0 + \int_0^{t_1} \dot{\vartheta} dt + \vartheta_1) E_2(\alpha(t_1)).$$

Lassen wir nun t von t_1 nach t_2 weitergehen, so erfährt die Winkelfunktion $\vartheta(t)$ einen weiteren Zuwachs um den Wert $\int_{t_1}^{t_2} \dot{\vartheta} dt$, sodass wir

$$\dot{\alpha}(t_2-) = \cos(\theta_0 + \int_0^{t_1} \dot{\vartheta} dt + \vartheta_1 + \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vartheta} dt) E_1(\alpha(t_2)) + \sin(\theta_0 + \int_0^{t_1} \dot{\vartheta} dt + \vartheta_1 + \int_{t_1}^{t_2} \dot{\vartheta} dt) E_2(\alpha(t_2))$$

erhalten. Weiteres Fortschreiten längs der Kurve α und sukzessive Addition der jeweiligen Beiträge zu $\vartheta(t)$ um die Werte $\int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\vartheta} dt$ und ϑ_{i+1} liefert nach $2(k+1)$ Schritten schliesslich

$$\dot{\alpha}(t_{k+1}+) = \cos(\theta_0 + \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\vartheta} dt + \sum_{i=0}^{k} \vartheta_i) E_1(\alpha(L)) +$$
$$\sin(\theta_0 + \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\vartheta} dt + \sum_{i=0}^{k} \vartheta_i) E_2(\alpha(L)) = \dot{\alpha}(0+),$$

wobei man $\alpha(t_{k+1}) = \alpha(L) = \alpha(0)$ und ausserdem $\vartheta_{k+1} = \vartheta_0$ beachte. Ein Vergleich der Winkel in dieser Formel mit Geichung (1.9) ergibt somit:

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\vartheta} dt + \sum_{i=0}^{k} \vartheta_i = 2\pi k \tag{1.10}$$

für ein bestimmtes $k \in \mathbb{Z}$, welches wir den ,,totalen Rotationsindex" η_α von α nennen. Unsere Aufgabe besteht nun also darin, $\eta_\alpha = \pm 1$ zu zeigen. Hierfür betrachten wir wie im Beweis von Lemma 1.2.2 die oben konstruierte Homotopie $H : V \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$ von $V := \exp_{z_0}^{-1}(U) \subset T_{z_0}S$ nach $\mathbb{R}^3$, welche die Abbildungen $H_1 = \exp_{z_0}$ und $H_0 = z_0 + id_V$ miteinander verbindet, und die aus $\gamma := \exp_{z_0}^{-1}(\alpha) : [0, L] \to V$ resultierende Schar geschlossener Jordan-Kurven $\gamma_s := H_s(\gamma)$, welche somit $\gamma_1 = \alpha$ mit $\gamma_0 = z_0 + \gamma$ verbindet. Führen wir zu jedem Zeitpunkt s im Verlauf dieser Homotopie den obigen Winkelvergleich für die Kurve γ_s mit (genau wie in Lemma 1.2.2) zugeordneter Winkelfunktion ϑ_s und ihren $k+1$ Aussenwinkeln ϑ_{si} durch, so erhalten wir analog zu (1.10):

$$\sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\vartheta}_s dt + \sum_{i=0}^{k} \vartheta_{si} = 2\pi \eta_{\gamma_s} \in 2\pi\mathbb{Z}. \tag{1.11}$$

Da einerseits die linke Seite dieser Gleichung stetig von s abhänght und die rechte Seite nur die diskrete Wertemenge $2\pi\mathbb{Z}$ hat, sind beide Seiten zwangsläufig konstant in s. Somit erhalten wir also schon einmal $\eta_\alpha = \eta_{\gamma_1} = \eta_{\gamma_0} = \eta_\gamma$. Nun ist γ eine stückweise glatte, geschlossene Jordan-Kurve mit $k+1$ Ecken in $V \setminus \{0\} \subset T_{z_0}S \setminus \{0\}$ und somit innerhalb $V \setminus \{0\}$ in eine Parametrisierung eines einfach geschlossenen $(k+1)$-Ecks E_{k+1} stetig deformierbar, d.h. es existiert eine weitere Homotopie $\tilde{H} : V \times [0,1] \to T_{z_0}S$, welche $\tilde{H}_0(\gamma) = \gamma$ in eine Parametrisierung $\tilde{H}_1(\gamma)$ von $E_{k+1} \subset V \setminus \{0\}$ überführt, sodass ein weiterer ,,Winkelsummen-Vergleich" der oben vorgeführten Art $\eta_\gamma = \eta_{E_{k+1}}$ ergibt. Da jede Parametrisierung von E_{k+1} eine stückweise lineare Kurve ist, vereinfacht sich eine zu (1.11) analoge Formel für $2\pi\eta_{E_{k+1}}$ zu

$$2\pi\eta_{E_{k+1}} = \text{Summe der Aussenwinkel von } E_{k+1} = \pm 2\pi,$$

wie man per Induktion über die Eckenanzahl planarer, einfach geschlossener Polygone mittels elementarer, geometrischer Argumente zeigen kann. Insgesamt erhalten wir also $\eta_\alpha = \eta_\gamma = \eta_{E_{k+1}} = \pm 1$, in Abhängigkeit davon, ob α das Gebiet $Int(\alpha)$ mit positiver oder negativer Orientierung umkreist.

◇

Hiermit kann man nun leicht die folgende Verallgemeinerung von Theorem 1.2.1 zeigen:

Theorem 1.2.2 (Lokale Version von Gauss-Bonnet für Gebiete mit Ecken) *Sei A eine einfach-zusammenhängende Teilmenge der punktierten Normalumgebung $U \setminus \{z_0\} = \exp_{z_0}(B^2_{r_0}(0) \setminus \{0\})$ eines Punktes $z_0 \in S$ mit nur stückweise glattem Rand ∂A und α eine bzgl. A positiv orientierte, stückweise glatte Parametrisierung von ∂A nach deren Bogenlänge. Dann gilt für die Gauss'sche Krümmung K_S von S, die geodätischen Krümmungen k_g der glatten Bögen $\alpha\,|_{[t_i,t_{i+1}]}$ von ∂A und die Aussenwinkel $\{\vartheta_i\}$ in den Ecken $\alpha(t_i)$, $i = 0, \dots, k$, von ∂A:*

$$\int_A K_S \, dvol_S = 2\pi - \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(t)\, dt - \sum_{i=0}^{k} \vartheta_i.$$

Beweis: Mittels exakt derselben Beweisführung wie in Theorem 1.2.1, also mittels Satz 8.5 aus Diffgeo I, der 2-dimensionalen Fassung des Gauss'schen Integralsatzes und Lemma 1.2.1, erhalten wir

$$\int_A K_S \, dvol_S = -\sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \lambda_r(r(t), \phi(t)) \, \dot{\phi}(t) \, dt = -\sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(t) \, dt + \sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{\vartheta}(t) \, dt.$$

Zusammen mit obigem Lemma 1.2.3 in Anwendung auf die stückweise glatte Jordan-Kurve α, welche ∂A mit positiver Orientierung bzgl. A parametrisiert, erhalten wir wie gewünscht:

$$\int_A K_S \, dvol_S = -\sum_{i=0}^{k} \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(t) \, dt + 2\pi - \sum_{i=0}^{k} \vartheta_i.$$

$\diamond$

Besonders interessant und prägnant ist diese Formel in Anwendung auf „gekrümmte Dreiecke" auf S:

Definition 1.2.3 *Wir nennen eine einfach-zusammenhängende, kompakte Teilmenge $\triangle$ von S ein „Dreieck", falls es einen stückweise glatten Rand mit genau 3 echten Ecken (also mit Aussenwinkeln $\neq 0$) besitzt. Zudem nennen wir $\delta_i := \pi - \vartheta_i \in (0, 2\pi) \setminus \{\pi\}$, $i = 0, 1, 2$, die „Innenwinkel" in seinen drei Ecken mit Aussenwinkeln ϑ_i.*

Korollar 1.2.1 (Gauss-Bonnet für kleine Dreiecke) *Sei $\triangle$ ein Dreieck in der punktierten Normalumgebung $U \setminus \{z_0\} = \exp_{z_0}(B^2_{r_0}(0) \setminus \{0\})$ eines Punktes $z_0 \in S$ und α eine bzgl. $\triangle$ positiv orientierte, stückweise glatte Parametrisierung von $\partial\triangle$ nach deren Bogenlänge mit geodätischer Krümmung k_g und Innenwinkeln δ_i. Dann gilt*

$$\int_\triangle K_S \, dvol_S + \sum_{i=0}^{2} \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_g(t) \, dt = \sum_{i=0}^{2} \delta_i - \pi. \tag{1.12}$$

Der Term auf der linken Seite misst also exakt den sogenannten „Winkelexzess" von $\triangle$, d.h. die Abweichung der Innenwinkelsumme $\sum_{i=0}^{2} \delta_i$ von deren Wert für alle planaren Dreiecke.

Um den Satz von Gauss-Bonnet von „kleinen" einfach-zusammenhängenden auf beliebig weit ausgedehnte m-fach zusammenhängende, kompakte Teilmengen von S zu verallgemeinern, benötigen wir den Begriff und die Existenz sogenannter Triangulierungen von S:

Definition 1.2.4 *Sei S eine 2-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ der Klasse C^2 und R eine kompakte, m-fach zusammenhängende Teilmenge von S mit stückweise glattem Rand ∂R.*
i) Wir nennen eine endliche Familie $\mathcal{T} := \{\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_F\}$ aus Dreiecken $\triangle_i \subset S$ eine Triangulierung von R, falls $R = \bigcup_{i=1}^{F} \triangle_i$ ist und falls der Durchschnitt $\triangle_i \cap \triangle_j$,

$i \neq j$, zweier Dreiecke entweder leer ist oder aus genau einer gemeinsamen Ecke oder aus genau einem gemeinsamen Bogen besteht, welcher zwei (zusammenfallende) Ecken von $\triangle_i$ bzw. $\triangle_j$ miteinander verbindet.
ii) Wir nennen $\max_{i=1,\ldots,F} \mathrm{diam}_{\mathbb{R}^3}(\triangle_i)$ die „Feinheit" der Triangulierung $\mathcal{T}$.
iii) Wir nennen eine Triangulierung $\mathcal{T}'$ von R eine Verfeinerung einer Triangulierung $\mathcal{T}$ von R, falls die Menge der Ecken von $\mathcal{T}$ in der Menge der Ecken von $\mathcal{T}'$ enthalten ist und jeder berandende Bogen eines Dreiecks von $\mathcal{T}'$ in einem solchen eines Dreiecks von $\mathcal{T}$ enthalten ist.
iv) Definieren wir ausser $F := \sharp(\mathcal{T}) \equiv$ Anzahl der Dreiecke von $\mathcal{T}$ noch E als die Anzahl der verschiedenen Ecken aller Dreiecke von $\mathcal{T}$ und K als die Anzahl der verschiedenen Randbögen aller Dreiecke von $\mathcal{T}$, so heisst $\chi(\mathcal{T}) := F - K + E$ die „Euler-Charakteristik" der Triangulierung $\mathcal{T}$ von R.

In einer Topologie-Vorlesung werden nun (hoffentlich) die beiden folgenden technischen Ergebnisse bewiesen:

Proposition 1.2.1 *i) Seien S und $R \subset S$ wie in Definition 1.2.4 beliebig vorgegeben, so* existiert *zu einem beliebigen $\epsilon > 0$ eine Triangulierung von R, deren Feinheit kleiner als ϵ ist.*
ii) Sind zwei Triangulierungen $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ von R beliebig vorgegeben, so gilt $\chi(\mathcal{T}_1) = \chi(\mathcal{T}_2)$, sodass also die Zuordung $R \longmapsto \chi(R)$ wohl-definierbar ist, also der kompakten Teilmenge R von S deren „Euler-Charakteristik" eindeutig zugewiesen werden kann.

Der Beweis von Teil (ii) dieser Proposition stützt sich auf die folgenden beiden elementaren Lemmata:

Lemma 1.2.4 *Seien zwei Triangulierungen $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ von R gegeben, so existiert eine gemeinsame Verfeinerung, bezeichnet mit $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$.*

Beweis: Man muss bloss die Menge aller Bögen der beiden Triangulierungen $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ miteinander vereinigen, die Menge der dabei entstehenden Kreuzungs- und Berührpunkte aller Bögen zur Menge der Ecken der zu konstruierenden Triangulierung $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$ erklären und anschliessend alle entstandenen n-Ecke, für $n > 3$, in Dreiecke weiter unterteilen. Die Menge aller dabei gebildeten Dreiecke ist dann in der Tat eine Triangulierung von R und verfeinert sowohl $\mathcal{T}_1$ als auch $\mathcal{T}_2$.

$\diamond$

Lemma 1.2.5 *Ist $\mathcal{T}'$ eine Verfeinerung einer vorgelegten Triangulierung $\mathcal{T}$ von R, so gilt $\chi(\mathcal{T}') = \chi(\mathcal{T})$.*

Beweis: Der Beweis wird per Induktion über die Anzahl der zusätzlichen Ecken von $\mathcal{T}'$ und mittels der folgenden Beobachtung geführt:
Entsteht $\mathcal{T}'$ aus $\mathcal{T}$ durch Hinzunahme eines einzigen weiteren Punkes z von R und anschliessende Vervollständigung zu einer Triangulierung von R, so sind zunächst die

folgenden drei Fälle zu unterscheiden:
i) z liegt auf einer Ecke von $\mathcal{T}$, ii) z liegt im Inneren einer Kante von $\mathcal{T}$, iii) z liegt im Inneren eines Dreiecks von $\mathcal{T}$. Im Fall (i) gilt offenbar $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$. Und sowohl im Fall (ii) als auch im Fall (iii) sieht man leicht mittels zweier Skizzen, dass $F(\mathcal{T}') = F(\mathcal{T}) + 2$, $K(\mathcal{T}') = K(\mathcal{T}) + 3$ und $E(\mathcal{T}') = E(\mathcal{T}) + 1$, sodass sich also $\chi(\mathcal{T}') = F(\mathcal{T}) + 2 - (K(\mathcal{T}) + 3) + E(\mathcal{T}) + 1 = \chi(\mathcal{T})$ ergibt.

$\diamond$

Hiermit folgt nun sofort der

Beweis von Proposition 1.2.1, (ii): Nach Lemma 1.2.4 existiert zu $\mathcal{T}_1$ und $\mathcal{T}_2$ eine gemeinsame Verfeinerung $\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2$, sodass aus Lemma 1.2.5 sofort $\chi(\mathcal{T}_1) = \chi(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{T}_2) = \chi(\mathcal{T}_2)$ folgt.

$\diamond$

Wir kommen nun zur allgemeinen Fassung des Satzes von Gauss-Bonnet:

Theorem 1.2.3 (Globale Version von Gauss-Bonnet für Gebiete mit Ecken) *Sei S eine 2-dimensionale, orientierbare Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ der Klasse C^7, R eine m-fach zusammenhängende, kompakte Teilmenge von S mit stückweise glattem Rand ∂R und $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$ bzgl. R positiv orientierte, stückweise glatte Parametrisierungen der m Komponenten von ∂R nach deren Bogenlängen. Dann gilt für die Gauss'sche Krümmung K_S von S, die geodätischen Krümmungen k_g^j der glatten Bögen $\alpha^j\,|_{[t_i^j, t_{i+1}^j]}$ von ∂R und die Aussenwinkel $\{\vartheta_i^j\}$ in den Ecken $\alpha^j(t_i^j)$ von ∂R:*

$$\int_R K_S\, dvol_S = 2\pi\, \chi(R) - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{k_j} \int_{t_i^j}^{t_{i+1}^j} k_g^j(t)\, dt - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{k_j} \vartheta_i^j.$$

Beweis: Nach Proposition 1.2.1 existiert eine derart feine Triangulierung $\mathcal{T} := \{\triangle_1, \triangle_2, \ldots, \triangle_F\}$ von R, dass jedes ihrer Dreiecke $\triangle_f$ in einer punktierten Normalumgebung $U_f \setminus \{z_f\}$ eines Punktes $z_f \in R$ enthalten ist. Bezeichnen δ_f^l, $l = 0, 1, 2$, die drei Innenwinkel des Dreiecks $\triangle_f$, so erhalten wir bei (bzgl. $\triangle_f$) positiv orientierter Parametrisierung (nach Bogenlänge) von $\partial\triangle_f$ aus Formel (1.12):

$$\int_{\triangle_f} K_S\, dvol_S + \int_{\partial\triangle_f} k_g(s)\, ds = \sum_{l=0}^{2} \delta_f^l - \pi, \tag{1.13}$$

für $f = 1, \ldots, F$. Beachtet man nun die positive Orientierung der Parametrisierungen der jeweils 3 Bögen von $\partial\triangle_f$ bzgl. des Dreiecks $\triangle_f$, für jedes f, in Kombination mit den Struktur-Bedingungen einer Triangulierung aus Definition 1.2.4, so erhält man bei Summation beider Seiten von Gleichung (1.13) über f:

$$\int_R K_S\, dvol_S + \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{k_j} \int_{t_i^j}^{t_{i+1}^j} k_g^j(t)\, dt = \sum_{f=1}^{F} \sum_{l=0}^{2} \delta_f^l - F\,\pi. \tag{1.14}$$

Zur weiteren Untersuchung der rechten Seite bezeichnen wir mit E_a bzw. E_i die Anzahl der (bzgl. R) äusseren bzw. inneren verschiedenen Ecken aller Dreiecke von $\mathcal{T}$ und mit K_a bzw. K_i die Anzahl der (bzgl. R) äusseren bzw. inneren verschiedenen Bögen aller Dreiecke von $\mathcal{T}$. Man beachte, dass die Menge der äusseren Ecken von $\mathcal{T}$ die Menge $\{\alpha^j(t_i^j)\}$ der Ecken von ∂R enthält, jedoch nicht mit dieser übereinstimmen muss. Da die m Komponenten von ∂R geschlossene Jordan-Kurven sind, wissen wir $E_a = K_a$. Ausserdem besitzt jedes Dreieck drei Randbögen, von denen die (bzgl. R) inneren an genau zwei verschiedene Dreiecke stossen und die äusseren nur genau ein Dreieck partiell beranden, es gilt also $3F = 2K_i + K_a$. Ausserdem ergibt die Summation aller Innenwinkel δ_f^l von Dreiecken um einen gemeinsamen inneren Eckpunkt herum gerade den Wert 2π, an einem gemeinsamen äusseren Eckpunkt entweder den Wert π oder $\pi - \vartheta_i^j$, abhängig davon ob dieser äussere Eckpunkt im Inneren eines glatten Bogens von ∂R liegt oder gerade mit einem Eckpunkt $\alpha^j(t_i^j)$ von ∂R zusammenfällt, für ein $j \in \{1, \ldots, m\}$ und ein $i \in \{0, \ldots, k_j\}$. Zusammen mit $E = E_a + E_i$ erhalten wir somit für die Innenwinkelsumme:

$$\sum_{f=1}^{F} \sum_{l=0}^{2} \delta_f^l = 2\pi E_i + \pi E_a - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{k_j} \vartheta_i^j \equiv 2\pi E - \pi E_a - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{k_j} \vartheta_i^j,$$

und hieraus schliesslich wegen $E_a = K_a$ und $3F = 2K_i + K_a$:

$$\begin{aligned} \sum_{f=1}^{F} \sum_{l=0}^{2} \delta_f^l - F\pi &= 2\pi E - \pi K_a - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{k_j} \vartheta_i^j - F\pi \\ &= 2\pi(E - K + F) - 3\pi F + 2\pi K - \pi K_a - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{k_j} \vartheta_i^j \\ &= 2\pi\, \chi(R) - \pi(2K_i + K_a) + 2\pi(K_i + K_a) - \pi K_a - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{k_j} \vartheta_i^j \\ &= 2\pi\, \chi(R) - \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=0}^{k_j} \vartheta_i^j, \end{aligned}$$

also zusammen mit (1.14) die Behauptung des Satzes.

$\diamond$

Korollar 1.2.2 (Satz von Gauss-Bonnet für geschlossene, orientierbare Flächen) *Sei S eine orientierbare, geschlossene (also kompakte, randlose) C^7-Hyperfläche des $\mathbb{R}^3$. Dann gilt für die „totale Gauss'sche Krümmung" von S:*

$$\int_S K_S \, dvol_S = 2\pi\, \chi(S). \tag{1.15}$$

$\diamond$

Dieser Satz motiviert insbesondere den Versuch, die Euler-Charakteristik geschlossener, orientierbarer Flächen S anhand einer günstigen Triangulierung zunächst direkt zu berechnen und dieses Ergebnis dann in Formel (1.15) einzusetzen.
Wieviele Diffeomorphie-Klassen solcher Flächen gibt es überhaupt ? Bleibt die Euler-Charakteristik unter diffeomorpher ,,Verbiegung" einer Fläche invariant ? Und welche ganzen Zahlen kann die Euler-Charakteristik einer beliebigen geschlossenen, orientierbaren Fläche S überhaupt annehmen ?

Betrachten wir zur Klärung dieser Fragen zunächst zwei identische Tori T_1, T_2, schneiden diese beide längs einer glatten, geschlossenen Jordan-Kurve auf und verkleben sie miteinander längs dieser beiden Schnitte. Wir erhalten somit die sogenannte ,,verbundene Summe" $T_1 \sharp T_2$, welche umgangssprachlich auch ,,Brezel" genannt wird. Welche Werte haben nun $\chi(T_1)$ und $\chi(T_1 \sharp T_2)$? Und welchen Wert hat allgemeiner die Euler-Charakteristik einer g-fachen verbundenen Summe $T_1 \sharp \ldots \sharp T_g =: B_g$ aus g identischen Tori, also einer Brezel mit g ,,Henkeln" ?

Präzisieren wir nun hierfür den Begriff der ,,verbundenen Summe" mittels desjenigen des ,,Amalgams" (man siehe hierzu auch [9], S. 12–24):

Definition 1.2.5 *Seien S_1 und S_2 zwei (nicht notwendig orientierbare) C^2-Hyperflächen des $\mathbb{R}^3$ und $R_j \subset S_j$, $j = 1, 2$, kompakte, m_j-fach zusammenhängende Teilmengen mit stückweise glatten Rändern (welche auch leer sein dürfen). Seien weiterhin $D \subset \mathbb{R}^2$ entweder eine endliche, disjunkte Vereinigung – also eine endliche direkte Summe $\coprod$ – aus abgeschlossenen Einheits-Intervallen oder aus Einheits-Kreisen oder aus abgeschlossenen Einheits-Kreisscheiben und $i_1 : D \longrightarrow R_1$ und $i_2 : D \longrightarrow R_2$ die sogenannten (stetigen) ,,Verklebungsabbildungen". Man definiert nun das ,,Amalgam" $R_1 \cup_{(i_1,i_2)} R_2$ über D bezüglich (i_1, i_2) als den Quotientenraum $(R_1 \coprod R_2)/\sim$ der direkten Summe $R_1 \coprod R_2$ modulo der Äquivalenzrelation: $z_1 \sim z_2$ für ein $z_1 \in R_1$ und ein $z_2 \in R_2$, genau dann wenn ein $x \in D$ existiert, welches $z_1 = i_1(x)$ und $z_2 = i_2(x)$ erfüllt. Es seien genau diejenigen Teilmengen von $R_1 \cup_{(i_1,i_2)} R_2$,,offen", deren Urbilder unter der kanonischen Projektion $p : R_1 \coprod R_2 \longrightarrow R_1 \cup_{(i_1,i_2)} R_2$ offene Teilmengen von $R_1 \coprod R_2$ sind.*

Bemerkung 1.2.1 *i) $R_1 \cup_{(i_1,i_2)} R_2$ ensteht also aus R_1 und R_2, indem man Bild$(i_1) \subset R_1$ und Bild$(i_2) \subset R_2$ punktweise miteinander identifiziert.*
ii) Das Amalgam $R_1 \cup_{(i_1,i_2)} R_2$ lässt sich auch durch eine ,,universelle Eigenschaft" charakterisieren, durch die sogenannte ,,Push-out"-Eigenschaft. Diese besagt: Sind $f_1 : R_1 \longrightarrow X$ und $f_2 : R_2 \longrightarrow X$ zwei beliebige stetige Abbildungen in einen beliebigen topologischen Raum X mit der Eigenschaft $f_1 \circ i_1 = f_2 \circ i_2$, so gibt es genau eine stetige Abbildung $F : R_1 \cup_{(i_1,i_2)} R_2 \longrightarrow X$, welche $F \circ j_1 = f_1$ auf R_1 und $F \circ j_2 = f_2$ auf R_2 erfüllt, wobei j_1 und j_2 die Inklusionen von R_1 und R_2 in ihr Amalgam $R_1 \cup_{(i_1,i_2)} R_2$ bezeichnen mögen. Die beiden vorgelegten Abbildungen f_1 und f_2 bestimmen also genau eine Abbildung F auf $R_1 \cup_{(i_1,i_2)} R_2$, welche auf $j_1(R_1)$ durch f_1 und auf $j_2(R_2)$ durch f_2 determiniert wird.
iii) Haben die Teilmengen $R_1 \subset S_1$ und $R_2 \subset S_2$ in der obigen Definition insbesondere nicht-leere, zueinander diffeomorphe, glatte Ränder $\partial R_1 \cong \partial R_2$, jeweils aus $m > 0$ geschlossenen C^2-Jordan-Kurven bestehend, und wählt man weiterhin die Menge D als

direkte Summe aus m Kopien der S^1 *und die Verklebungsabbildungen* $i_1 : D \xrightarrow{\cong} \partial R_1$ *und* $i_2 : D \xrightarrow{\cong} \partial R_2$ *als Diffeomorphismen auf* ∂R_1 *und* ∂R_2*, so ist offenbar das Amalgam* $R_1 \cup_{(i_1,i_2)} R_2$ *über D gerade die ,,Verklebung" von* R_1 *mit* R_2 *entlang ihrer beider Ränder mittels der Verklebungsabbildungen* i_1 *und* i_2.

Speziell für $m = 1$ führt uns diese letzte Bemerkung auf den Begriff der ,,verbundenen Summe" zweier geschlossener C^2-Hyperflächen des $\mathbb{R}^3$:

Definition 1.2.6 *Seien* S_1 *und* S_2 *zwei geschlossene (also kompakte und randlose)* C^2*-Hyperflächen des* $\mathbb{R}^3$*. Aus* S_1 *und* S_2 *entferne man jeweils eine zur offenen Einheits-Kreisscheibe* $B^2_1(0)$ *diffeomorphe Teilmenge* K_1 *bzw.* K_2 *und bezeichne mit* $R_1 := S_1 \setminus K_1$ *und* $R_2 := S_2 \setminus K_2$ *die ,,aufgeschnittenen" kompakten Teilmengen der ursprünglichen Flächen* S_1*,* S_2 *und mit* $i_j : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\cong} \partial K_j = \partial R_j$*,* $j = 1, 2$*, zwei fest gewählte Diffeomorphismen. Wir definieren die ,,verbundene Summe"* $S_1 \sharp S_2$ *als das Amalgam* $R_1 \cup_{(i_1,i_2)} R_2$ *aus* R_1 *und* R_2 *über* $\mathbb{S}^1$ *mit den ,,Verklebungsabbildungen"* i_1, i_2.

Die folgende Übungsaufgabe erhellt nun ein wenig die Finsternis:

Proposition 1.2.2 *Seien* $R_1 \subset S_1$ *und* $R_2 \subset S_2$ *wie in Definition 1.2.5.*
i) Falls R_1 *und* R_2 *zueinander diffeomorph (oder auch nur homöomorph) sind, so gilt* $\chi(R_1) = \chi(R_2)$.
ii) Für die Euler-Charakteristik eines Amalgams $R_1 \cup_{(i_1,i_2)} R_2$ *über D gilt im Falle einbettender Verklebungsabbildungen* $i_j : D \xrightarrow{\cong} i_j(D) \subset R_j$ *die einprägsame Formel:*

$$\chi(R_1 \cup_{(i_1,i_2)} R_2) = \chi(R_1) + \chi(R_2) - \chi(D). \tag{1.16}$$

iii) Für die Euler-Charakteristik einer g-fachen verbundenen Summe $B_g := T_1 \sharp \ldots \sharp T_g$ *aus g identischen Tori (jeweils miteinander verklebt über* $\mathbb{S}^1$*), also einer Brezel mit g ,,Henkeln", gilt die Formel* $\chi(B_g) = 2 - 2g$.

Die Punkte (i) und (ii) sind zum Glück recht leicht einzusehen, und die Formel $\chi(B_g) = 2 - 2g$ folgt dann mittels der ,,Additionsformel" (1.16) per Induktion über die Anzahl g der Henkel, das sogenannte Geschlecht von B_g, nachdem man sich noch von $\chi(\mathbb{S}^1) = 0$ und $\chi(B^2_1(0)) = 1$ vergewissert hat.
Desweiteren lässt sich in der Tat der folgende Klassifikations-Satz der Differential-Topologie beweisen (man siehe hierzu [8], S. 10 und S. 18–28):

Theorem 1.2.4 *Sei S eine orientierbare, geschlossene* C^7*-Hyperfläche im* $\mathbb{R}^3$*. So ist S entweder zur Sphäre* $\mathbb{S}^2$ *oder zum g-fachen Amalgam* $B_g := T_1 \sharp \ldots \sharp T_g$ *aus g identischen Tori homöomorph (sogar diffeomorph), für eine natürliche Zahl* $g(S)$*, das Geschlecht von S. Es besteht demnach eine Bijektion zwischen der Menge der Diffeomorphie-Klassen orientierbarer, geschlossener* C^7*-Flächen und* $\mathbb{N}_0$.

Aus Proposition 1.2.2 und Theorem 1.2.4 erkennt man also, dass zwei orientierbare, geschlossene C^7-Flächen genau dann zueinander diffeomorph sind, wenn ihre Euler-Charakteristiken - und somit nach (1.15) ihre totalen Gauss'schen Krümmungen - miteinander übereinstimmen.

2 Riemannsche Geometrie

2.1 Differenzierbare Mannigfaltigkeiten

Wie wir bereits am Beispiel reeller projektiver Räume oder des Möbiusbandes zusammen mit deren Amalgamen und verbundenen Summen sehen konnten, lassen sich mit dem Konzept „orientierbarer Untermannigfaltigkeiten (mit Kodimension 1) euklidischer Räume" recht elementare Objekte der Geometrie bzw. unserer Anschauung nicht mehr mathematisch erfassen. Darum lösen wir uns nun von diesem restriktiven Modell, indem wir einen wesentlich allgemeineren, „nicht-euklidischen" Begriff einer „Mannigfaltigkeit" einführen:

Definition 2.1.1 *Eine Mannigfaltigkeit M der Dimension n sei ein hausdorffscher, parakompakter topologischer Raum mit der Eigenschaft, dass jeder Punkt $p \in M$ eine Umgebung in M besitze, welche homöomorph auf den $\mathbb{R}^n$ (ausgestattet mit der euklidischen Metrik) abgebildet werden kann.*

Definition 2.1.2 *Wir nennen ein Paar (Ω, Φ) bestehend aus einer offenen Menge Ω in M und einem Homöomorphismus $\Phi : \Omega \xrightarrow{\cong} \Phi(\Omega) \subset \mathbb{R}^n$ eine (lokale) Karte und eine Familie $\{(\Omega_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$ solcher Karten einen Atlas von M, falls $\bigcup_{i \in I} \Omega_i = M$ ist.*

Jeder Punkt $p \in M$ ist also in (mindestens) einer Karte (Ω, Φ) eines Atlanten von M enthalten, und wir werden die n Koordinaten $(\Phi^1(p), \ldots, \Phi^n(p))$ von $\Phi(p) \in \mathbb{R}^n$ als die „Koordinaten des Punktes p" bezüglich der Karte (Ω, Φ) bezeichnen bzw. auffassen.

Definition 2.1.3 *Wir nennen einen Atlas $\{(\Omega_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$ einer Mannigfaltigkeit M „von der Klasse C^k" ($k > 1$), falls für zwei beliebige Karten $(\Omega_\alpha, \Phi_\alpha)$, $(\Omega_\beta, \Phi_\beta)$ mit $\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta \neq \emptyset$ der sogenannte „Kartenwechsel" $\Phi_\alpha \circ \Phi_\beta^{-1}$ ein C^k-Diffeomorphismus von $\Phi_\beta(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)$ auf $\Phi_\alpha(\Omega_\alpha \cap \Omega_\beta)$ ist.*

Auf der Menge aller Atlanten der Klasse C^k von M wird die folgende Äquivalenzrelation eingeführt: Zwei Atlanten $\{(\Omega_i, \Phi_i)\}_{i \in I}$, $\{(U_j, \Psi_j)\}_{j \in J}$ heissen äquivalent, falls ihre Vereinigung wieder ein Atlas der Klasse C^k ist, d.h. falls auch jeder Kartenwechsel $\Phi_i \circ (\Psi_j)^{-1}$ (zwischen zwei Karten aus verschiedenen Atlanten) einen C^k-Diffeomorphismus von $\Psi_j(\Omega_i \cap U_j)$ auf $\Phi_i(\Omega_i \cap U_j)$ liefert, falls $\Omega_i \cap U_j \neq \emptyset$ ist. Die Äquivalenzklassen aller Atlanten (der Klasse C^k von M) bzgl. dieser Äquivalenzrelation nennt man „differenzierbare Strukturen" der Klasse C^k von M.

Definition 2.1.4 *Wir bezeichnen ein Paar bestehend aus einer Mannigfaltigkeit M und einer seiner differenzierbaren Strukturen der Klasse C^k als eine „differenzierbare Mannigfaltigkeit" (der Klasse C^k).*

Zwischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten können wir nun differenzierbare Abbildungen einführen:

Definition 2.1.5 *i) Wir nennen eine Abbildung $F : M \longrightarrow W$ zwischen zwei differenzierbaren Mannigfaltigkeiten der Klasse C^k ,,differenzierbar", falls es zu jedem Punkt $p \in M$ eine Karte (Ω, Φ) mit $p \in \Omega$ und eine Karte (U, Ψ) mit $F(p) \in U$ gibt, sodass die Komposition $\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}$ eine k-fach stetig differenzierbare Abbildung von $\Phi(\Omega)$ nach $\Psi(U)$ ist.*
ii) Ist F ausserdem eine bijektive Abbildung von M auf W, so heisse sie ein C^k-Diffeomorphismus zwischen M und W, falls jeder Punkt $p \in M$ eine Karte (Ω, Φ) mit $p \in \Omega$ besitzt, sodass die Komposition $\Psi \circ F \circ \Phi^{-1}$ ein C^k-Diffeomorphismus von $\Phi(\Omega)$ auf $(\Psi \circ F)(\Omega)$ ist, wobei (U, Ψ) eine Karte von W mit $F(\Omega) \subset U$ sei. In diesem Fall ist also F ein differenzierbarer Homöomorphismus von M auf W (von der Klasse C^k), dessen inverse Abbildung F^{-1} ebenfalls differenzierbar (von der Klasse C^k) ist.

2.2 Tangentialräume und -bündel differenzierbarer Mannigfaltigkeiten

Es gibt zwei verschiedene, kanonische Möglichkeiten, einen ,,Tangentialvektor" an einen Punkt einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M einzuführen:

Definition 2.2.1 *[1. Definition eines Tangentialvektors] Seien $p \in M$ ein beliebiger Punkt und $\gamma_1, \gamma_2 : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ zwei differenzierbare Abbildungen (also ,,glatte" Kurven der Klasse C^k auf M) mit $\gamma_1(0) = p = \gamma_2(0)$. Sei weiterhin (Ω, Φ) eine beliebige Karte vom M mit $p \in \Omega$, so nennen wir die beiden Kurven γ_1, γ_2 zueinander äquivalent in p, falls $\frac{d}{dt}(\Phi \circ \gamma_1)(0) = \frac{d}{dt}(\Phi \circ \gamma_2)(0)$ gilt, falls also die beiden Kurven $\Phi \circ \gamma_1$ und $\Phi \circ \gamma_2$ den Punkt $\Phi(p)$ des $\mathbb{R}^n$ mit übereinstimmender Richtung und Geschwindigkeit durchlaufen. Die Ä-Klassen $[\gamma]$ aller differenzierbarer Kurven $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ mit $\gamma(0) = p$ bzgl. der hiermit erklärten Ä-Relation werden als ,,Tangentialvektoren" X an M im Punkt p bezeichnet.*

Dies ist eine zwar recht anschauliche, jedoch für Berechnungen ungünstige Definition. Ausserdem ist unklar, wie man die Addition zweier Äquivalenzklassen $[\gamma_1]$, $[\gamma_2]$ und wie man die Multiplikation einer Klasse $[\gamma]$ mit einer reellen Zahl λ erklären soll. Somit wird die folgende, eher abstrakt wirkende Definition bevorzugt:

Definition 2.2.2 *[2. Definition eines Tangentialvektors] Wir nennen einen ,,Tangentialvektor" an einen Punkt $p \in M$, mit entsprechender Karte (Ω, Φ), eine Abbildung X, welche jeder differenzierbaren Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einer beliebigen Umgebung U von p in Ω einen reellen Wert zuweist und dabei den beiden folgenden Bedingungen genügt:*
i) Linearität: $X(\lambda f + \mu g) = \lambda X(f) + \mu X(g)$, für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und differenzierbare Funktionen $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$,
ii) $X(f) = 0$, falls $\nabla(f \circ \Phi^{-1}) \mid_{\Phi(p)}= 0$ ist.

Man kann aus diesen beiden geforderten Eigenschaften an einen „Tangentialvektor" X an $p \in M$ leicht dessen „Produktregel" ableiten, also dass für zwei beliebige differenzierbare Funktionen $f, g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ auf einer Umgebung U von $p \in M$

$$X(fg) = f(p)\, X(g) + g(p)\, X(f) \tag{2.1}$$

gelten muss. Desweiteren erhalten wir vermöge der 2. Definition eines Tangentialvektors die folgende

Proposition 2.2.1 *Die Menge T_pM aller Tangentialvektoren X an einen Punkt p einer n-dimensionalen, differenzierbaren Mannigfaltigkeit M ist mittels der Erklärungen $(X+Y)(f) := X(f)+Y(f)$ und $(\lambda X)(f) := \lambda\, X(f)$ ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Man bezeichnet diesen somit als den „Tangentialraum" an M im Punkt p.*

Beweis: Offenbar ist T_pM ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Zur Bestimmung seiner Dimension müssen wir uns eine „kanonische" Basis von T_pM zu verschaffen versuchen. Wir fixieren hierfür eine Karte (Ω, Φ) von M mit $p \in \Omega$, bezeichnen die Koordinaten eines Punktes x des $\mathbb{R}^n$ mit $x^1, x^2, \ldots, x^n$, sodass also $x = \sum_{i=1}^n x^i e_i$ gilt, und betrachten die n Tangentialvektoren $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p \in T_pM$, welche vermöge der Vorschrift

$$(\frac{\partial}{\partial x^i})_p(f) := \frac{\partial (f \circ \Phi^{-1})}{\partial x^i} \,|_{\Phi(p)} \tag{2.2}$$

auf differenzierbare Funktionen $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ (auf Umgebungen U um p) wirken sollen. Zunächst erfüllen die $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ offensichtlich beide Bedingungen aus Definition 2.2.2, sodass also die Behauptung „$(\frac{\partial}{\partial x^i})_p \in T_pM$" korrekt ist. Wenden wir desweiteren diese Tangentialvektoren auf die n Koordinaten-Funktionen $\Phi^j(q) : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ an, so sehen wir per deren Definition:

$$(\frac{\partial}{\partial x^i})_p(\Phi^j) \equiv \frac{\partial(\Phi^j \circ \Phi^{-1})}{\partial x^i} \,|_{\Phi(p)} = \frac{\partial x^j}{\partial x^i} \,|_{\Phi(p)} = \delta_{ij}.$$

Somit können die Vektoren $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p\}$ also nicht linear voneinander abhängig in T_pM sein. Sei nun eine beliebige differenzierbare Funktion $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ um p vorgegeben. Wie wir soeben bereits ausnutzten, gilt offenbar $\frac{\partial(\Phi^j \circ \Phi^{-1})}{\partial x^i} = \delta_{ij}$, also $\nabla(\Phi^j \circ \Phi^{-1}) = e_j$ und somit

$$\nabla(\sum_{j=1}^n (\frac{\partial}{\partial x^j})_p(f)\, \Phi^j \circ \Phi^{-1}) \,|_{\Phi(p)} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial(f \circ \Phi^{-1})}{\partial x^j} \,|_{\Phi(p)}\; e_j \equiv \nabla(f \circ \Phi^{-1}) \,|_{\Phi(p)}\ .$$

Somit gilt also $\nabla((f - \sum_{j=1}^n (\frac{\partial}{\partial x^j})_p(f)\, \Phi^j) \circ \Phi^{-1}) \,|_{\Phi(p)} = 0$, und daher für einen beliebigen Tangentialvektor $X \in T_pM$ anhand seiner beiden Eigenschaften aus Definition 2.2.2:

$$X(f) = X(\sum_{j=1}^n (\frac{\partial}{\partial x^j})_p(f)\, \Phi^j) = (\sum_{j=1}^n X(\Phi^j)\, (\frac{\partial}{\partial x^j})_p)(f).$$

Wir können also jedes $X \in T_pM$ durch eine Linearkombination der n Tangentialvektoren $(\frac{\partial}{\partial x^i})_p$ mit den Koeffizienten $X^i := X(\Phi^i)$ erzeugen. Somit bildet $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_p\}_{i=1,\ldots,n}$ eine Basis von T_pM, und T_pM hat die Dimension n.

$\diamond$

Desweiteren lässt sich als Übungsaufgabe schnell zeigen:

Proposition 2.2.2 *Die Abbildung Θ, die einer beliebig gewählten Äquivalenzklasse $[\gamma]$ differenzierbarer Kurven $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ durch einen Punkt $p \in M$ (wie in Definition 2.2.1) denjenigen Tangentialvektor $X \in T_pM$ zuordnet, der vermöge der Vorschrift $X(f) := \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \mid_{t=0}$ auf differenzierbaren Funktionen um p operiert, ist eine wohldefinierte, bijektive Abbildung von der Menge all jener Äquivalenzklassen $[\gamma]$ auf den Tangentialraum T_pM.*

Wie für Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n+1}$ ist der Begriff des Tangentialbündels $TM := \coprod_{p \in M}\{p\} \times T_pM$ zusammen mit den von differenzierbaren Abbildungen $\Psi : M \longrightarrow W$ induzierten Bündel-Morphismen $T\Psi : TM \longrightarrow TW$ von zentraler Bedeutung. Wir definieren die Wirkung von $T\Psi$ auf ein beliebiges Paar $(p, X) \in TM$ durch $T\Psi(p, X) := (\Psi(p), (T\Psi)_p(X))$ und

$$(T\Psi)_p(X) : f \longmapsto X(f \circ \Psi), \tag{2.3}$$

wobei f eine beliebige differenzierbare Funktion auf einer Umgebung von $\Psi(p)$ bezeichne. Man prüft leicht nach, dass per dieser Definiton $(T\Psi)_p(X)$ tatsächlich ein Element des Tangentialraums $T_{\Psi(p)}W$, also $(\Psi(p), (T\Psi)_p(X)) \in TW$, und $(T\Psi)_p : T_pM \longrightarrow T_{\Psi(p)}W$ linear und somit $T\Psi : TM \longrightarrow TW$ ein ,,Bündel-Morphismus" ist, welcher sich anhand der Überlegungen aus der folgenden Proposition 2.2.3 sogar als diff.bar herausstellen wird. Aus der Vorschrift (2.3) erkennt man sofort, dass der ,,Tangential-Funktor" T ,,kovariant" auf Kompositionen $\Psi_2 \circ \Psi_1$ zweier Abbildungen $\Psi_1 : M \longrightarrow W$, $\Psi_2 : W \longrightarrow N$ wirkt, also dass (die uns vertraute Kettenregel) $T(\Psi_2 \circ \Psi_1) = (T\Psi_2) \circ (T\Psi_1)$ gilt, einfach wegen

$$(T(\Psi_2 \circ \Psi_1)(X))(f) \equiv X(f \circ \Psi_2 \circ \Psi_1) = (T\Psi_1(X))(f \circ \Psi_2) = (T\Psi_2(T\Psi_1(X)))(f),$$

für jeden Tangentialvektor $X \in T_pM$. Ein illustratives Beispiel für die ,,Natürlichkeit" des sich entwickelnden Formalismus' liefert die Anwendung von (2.3) auf differenzierbare Kurven $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ durch einen Punkt $p = \gamma(0) \in M$ und den Basis-Vektor $(\frac{d}{dt})_0 \in T_0(-\epsilon, \epsilon)$ von $T_0(-\epsilon, \epsilon) \equiv T_0\mathbb{R}$, welcher per Definition (2.2) einfach durch $(\frac{d}{dt})_0(g) := \frac{dg}{dt}(0)$ (ohne Zuhilfenahme einer Karte von $(-\epsilon, \epsilon)$) auf diff.bare Funktionen $g : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$ zu wirken hat. Es ergibt sich nämlich aus (2.3) in Übereinstimmung mit der Identifikation $\Theta : [\gamma] \longleftrightarrow \Theta([\gamma])(f) := \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \mid_{t=0}$ aus Proposition 2.2.2:

$$(T\gamma)_0((\frac{d}{dt})_0)(f) \equiv (\frac{d}{dt})_0(f \circ \gamma) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0) \equiv \Theta([\gamma])(f),$$

für eine beliebige diff.bare Fkt. f auf einer Umgebung U von $p = \gamma(0) \in M$. Also, $(T\gamma)_0((\frac{d}{dt})_0) = \Theta([\gamma])$, was eindrucksvoll unter Beweis stellt, dass der Funktor T den Basisvektor $(\frac{d}{dt})_0$ von $T_0(-\epsilon, \epsilon) \equiv T_0\mathbb{R}$ mittels der Kurve γ einerseits in einen Tangentialvektor $(T\gamma)_0((\frac{d}{dt})_0)$ von T_pM und andererseits in eine Art ,,Richtungsableitung" einer beliebigen diff.baren Fkt. f in $p \in M$ in ,,Richtung $[\gamma]$" verwandelt.

Nun können wir einsehen (siehe auch [1], S. 48):

Proposition 2.2.3 *Ist M eine n-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit der Klasse C^k, so ist ihr Tangentialbündel TM eine $2n$-dimensionale, differenzierbare Mannigfaltigkeit, jedoch nur von der Klasse C^{k-1}.*

Beweis: Wir müssen nachweisen, dass der Tangential-Funktor T einen Atlas $\{(\Omega_i, \Phi_i)\}$ der Klasse C^k von M in einen Atlas $\{(T\Omega_i, T\Phi_i)\}$ der Klasse C^{k-1} von TM verwandelt. Und in der Tat folgern wir (bei fixiertem i) aus den Definitionen (2.3) und (2.2) für jeden Punkt $p \in \Omega_i$ und für einen Basis-Vektor $(\frac{\partial}{\partial x^j})_p \in T_p\Omega_i$: $T\Phi_i\Big(p, (\frac{\partial}{\partial x^j})_p\Big) := \Big(\Phi_i(p), (T\Phi_i)_p\Big((\frac{\partial}{\partial x^j})_p\Big)\Big)$, mit

$$(T\Phi_i)_p\Big((\frac{\partial}{\partial x^j})_p\Big)(f) := (\frac{\partial}{\partial x^j})_p(f \circ \Phi_i) = \frac{\partial(f \circ \Phi_i \circ \Phi_i^{-1})}{\partial x^j} \,|_{\Phi_i(p)}$$
$$\equiv \frac{\partial f}{\partial e_j}(\Phi_i(p)) \equiv e_j \,|_{\Phi_i(p)} (f),$$

für eine beliebige diff.bare Funktion f auf einer Umgebung von $\Phi_i(p)$ im $\mathbb{R}^n$, wenn wir die Wirkung eines Standard-Basisvektors e_j des $\mathbb{R}^n$ auf eine diff.bare Funktion f in einem beliebigen Punkt $x \in Domain(f)$ gerade durch die entsprechende Richtungsableitung $e_j \,|_x (f) := \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) \equiv \frac{\partial f}{\partial x^j}(x)$ erklären. Somit erhalten wir also $(T\Phi_i)_p\Big((\frac{\partial}{\partial x^j})_p\Big) = e_j$ und damit $(T\Phi_i)_p(X) = \sum_{j=1}^n X^j e_j$ für einen beliebigen Tangentialvektor $X \in T_p\Omega_i$, sodass also $T\Phi_i$ vermöge $(p, X) \longmapsto (\Phi_i(p), (X^1, \ldots, X^n))$ einen Bündel-Isomorphismus $T\Phi_i : T\Omega_i \xrightarrow{\cong} T(\Phi_i(\Omega_i)) = \Phi_i(\Omega_i) \times \mathbb{R}^n$ liefert. Da ausserdem die Karten $\{(T\Omega_i, T\Phi_i)\}$ das Tangentialbündel TM überdecken, bilden sie einen Atlas von TM, welches somit eine $2n$-dimensionale Mannigfaltigkeit sein muss, da die Kartenbilder $T\Phi_i(T\Omega_i) = \Phi_i(\Omega_i) \times \mathbb{R}^n$ offene Teilmengen des $\mathbb{R}^{2n}$ sind. Schliesslich ist $\{(T\Omega_i, T\Phi_i)\}$ ein C^{k-1}-Atlas und somit insbesondere $T\Phi_i$ ein C^{k-1}-Diffeomorphismus. Hierzu müssen wir einsehen, dass für zwei beliebige Karten Ω_i, Ω_l von M mit $\Omega_i \cap \Omega_l \neq \emptyset$ die C^k-Kartenwechsel-Abbildung $\Phi_i \circ \Phi_l^{-1} : \Phi_l(\Omega_i \cap \Omega_l) \xrightarrow{\cong} \Phi_i(\Omega_i \cap \Omega_l)$ von T in einen C^{k-1}-Diffeomorphismus

$$T(\Phi_i \circ \Phi_l^{-1}) = T\Phi_i \circ (T\Phi_l)^{-1} : \Phi_l(\Omega_i \cap \Omega_l) \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\cong} \Phi_i(\Omega_i \cap \Omega_l) \times \mathbb{R}^n$$

verwandelt wird. Und in der Tat sehen wir anhand der klassischen Kettenregel für einen beliebigen Punkt $x \in \Phi_l(\Omega_i \cap \Omega_l)$, einen beliebigen Standard-Basisvektor e_j des $\mathbb{R}^n$ und eine beliebige diff.bare Funktion f auf einer Umgebung von $\Phi_i \circ \Phi_l^{-1}(x)$:

$$[T(\Phi_i \circ \Phi_l^{-1})_x(e_j)](f) = e_j \,|_x (f \circ \Phi_i \circ \Phi_l^{-1}) = \frac{\partial(f \circ \Phi_i \circ \Phi_l^{-1})}{\partial x^j}(x)$$
$$= \langle \nabla f(\Phi_i \circ \Phi_l^{-1}(x)), \frac{\partial(\Phi_i \circ \Phi_l^{-1})}{\partial x^j}(x) \rangle \equiv \langle \nabla f(\Phi_i \circ \Phi_l^{-1}(x)), D(\Phi_i \circ \Phi_l^{-1})(x) \cdot e_j \rangle,$$

welches also die Richtungsableitung von f im Punkt $\Phi_i \circ \Phi_l^{-1}(x)$ in Richtung des Vektors $D(\Phi_i \circ \Phi_l^{-1})(x) \cdot e_j \in \mathbb{R}^n$ ist. Lesen wir nun die obige Vereinbarung, also die Definition

$e_k\,|_{\Phi_i\circ\Phi_l^{-1}(x)}\,(f) := \frac{\partial f}{\partial x^k}(\Phi_i\circ\Phi_l^{-1}(x))$ von rechts nach links, so erhalten wir das wünschenswerte Resultat: $[T(\Phi_i\circ\Phi_l^{-1})_x(e_j)](f) = D(\Phi_i\circ\Phi_l^{-1})(x)\cdot e_j\,|_{\Phi_i\circ\Phi_l^{-1}(x)}\,(f)$, für jedes diff.bare f um $\Phi_i\circ\Phi_l^{-1}(x)$, also insgesamt für ein beliebiges Paar $(x,v)\in\Phi_l(\Omega_i\cap\Omega_l)\times\mathbb{R}^n$:

$$(T\Phi_i\circ(T\Phi_l)^{-1})(x,v) = T(\Phi_i\circ\Phi_l^{-1})(x,v) = (\Phi_i\circ\Phi_l^{-1}(x), D(\Phi_i\circ\Phi_l^{-1})(x)\cdot v).$$

Da die Zuordnung $(x,v)\mapsto D(\Phi_i\circ\Phi_l^{-1})(x)\cdot v$ in der Tat von der Klasse C^{k-1} ist, stellt sich somit der Kartenwechsel $T\Phi_i\circ(T\Phi_l)^{-1}$ als C^{k-1}-Diffeomorphismus heraus.

$\diamond$

Man sollte das Tangentialbündel TM am besten als ein Tripel (TM,Π,M) auffassen, wobei $\Pi : TM \longrightarrow M$ die Projektion von $TM \equiv \coprod_{p\in M}\{p\}\times T_pM$ auf M mit $\{p\}\times T_pM = \Pi^{-1}(p)$, $\forall p\in M$, sei.

Definition 2.2.3 *Ein C^k-(Tangential)-Vektorfeld X auf einer diff.baren Mannigfaltigkeit M der Klasse C^∞ ist ein sogenannter C^k-,,Schnitt" des Tangentialbündels TM, d.h. eine diff.bare Abbildung $X : M \longrightarrow TM$ der Klasse C^k mit $\Pi\circ X = id_M$.*

Anhand der Vektorraumstruktur der ,,Fasern" T_pM von TM bildet offenbar die Menge $\Gamma_k(M)$ aller C^k-Vektorfelder auf M ebenfalls einen $\mathbb{R}$-Vektorraum.
Bevor wir den Begriff des ,,linearen Zusammenhangs" auf einer C^∞-Mannigfaltigkeit M einführen, übertragen wir denjenigen des ,,Kommutator-Feldes" bzw. der ,,Lie-Klammer" zweier Vektorfelder von C^∞-Hyperflächen des $\mathbb{R}^{n+1}$ auf allgemeine C^∞-Mannigfaltigkeiten:

Definition 2.2.4 *Wir definieren die ,,Lie-Klammer" $[X,Y]$ zweier C^k-Vektorfelder X,Y auf einer C^∞-Mannigfaltigkeit M durch:*

$$[X,Y]_q(f) := X_q(Y(f)) - Y_q(X(f)),$$

für jede diff.bare Funktion f auf einer Umgebung U eines beliebig fixierten Punktes $p\in M$ und für jedes $q\in U$.

Offensichtlich ist $[X,Y]$ wieder ein Vektorfeld auf M, und es gilt in Analogie zum Kommutator-Feld zweier Vektorfelder auf einer C^∞-Hyperfläche des $\mathbb{R}^{n+1}$:

Proposition 2.2.4 *Seien zwei C^k-Vektorfelder X,Y auf M gegeben, $p\in M$ ein beliebig fixierter Punkt, (Ω,Φ) eine Karte um p und $\{(\frac{\partial}{\partial x^i})_q\}_{i=1,\dots,n}$ die kanonische Basis von T_qM, in $q\in\Omega$, bzgl. dieser Karte, wie in (2.2) angegeben (sodass also $X_q = \sum_{i=1}^n X^i\,(\frac{\partial}{\partial x^i})_q$ mit $X^i := X(\Phi^i)$ und $Y_q = \sum_{i=1}^n Y^i\,(\frac{\partial}{\partial x^i})_q$ mit $Y^i := Y(\Phi^i)$ gilt). So lässt sich $[X,Y]$ in der Form*

$$[X,Y]_q = \sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n\Big(X^j\,(\frac{\partial}{\partial x^j})_q(Y^i) - Y^j(\frac{\partial}{\partial x^j})_q(X^i)\Big)\Big)(\frac{\partial}{\partial x^i})_q,$$

$\forall\, q\in\Omega$ darstellen. Insbesondere ist somit $[X,Y]\in\Gamma_{k-1}(M)$.

Beweis: Wir müssen nur die beiden Darstellungen $X_q = \sum_{i=1}^n X^i\,(\frac{\partial}{\partial x^i})_q$ und $Y_q = \sum_{i=1}^n Y^i\,(\frac{\partial}{\partial x^i})_q$ in die Definition von $[X,Y]$ einsetzen und beachten, dass für jede diff.bare Funktion f per Definition die Komposition $f \circ \Phi^{-1}$ mindestens zweimal stetig diff.bar und somit deren Hessesche Matrix $D^2(f \circ \Phi^{-1})$ symmetrisch ist:

$$\begin{aligned}
[X,Y]_q(f) = \sum_{j=1}^n X^j\,(\frac{\partial}{\partial x^j})_q\Big(\sum_{i=1}^n Y^i\,(\frac{\partial}{\partial x^i})_q(f)\Big) - \sum_{j=1}^n Y^j\,(\frac{\partial}{\partial x^j})_q\Big(\sum_{i=1}^n X^i\,(\frac{\partial}{\partial x^i})_q(f)\Big)& \\
= \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n X^j\,(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j})_q\,(\frac{\partial}{\partial x^i})_q(f) + \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n X^j\,Y^i\,\frac{\partial^2(f\circ\Phi^{-1})}{\partial x^j\partial x^i}\,|_{\Phi(q)}& \\
- \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n Y^j\,(\frac{\partial X^i}{\partial x^j})_q\,(\frac{\partial}{\partial x^i})_q(f) - \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n Y^j\,X^i\,\frac{\partial^2(f\circ\Phi^{-1})}{\partial x^j\partial x^i}\,|_{\Phi(q)}& \\
= \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n X^j\,(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j})_q\,(\frac{\partial}{\partial x^i})_q(f) - \sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^n Y^j\,(\frac{\partial X^i}{\partial x^j})_q\,(\frac{\partial}{\partial x^i})_q(f)& \\
= \sum_{i=1}^n\Big(\sum_{j=1}^n\Big(X^j\,(\frac{\partial Y^i}{\partial x^j})_q - Y^j\,(\frac{\partial X^i}{\partial x^j})_q\Big)\Big)(\frac{\partial}{\partial x^i})_q(f),&
\end{aligned}$$

für jede diff.bare Funktion f auf einer Umgebung $U \subset \Omega$ von $p \in M$ und für jedes $q \in U$.

$\diamond$

Desweiteren erhält man für drei beliebige C^k-Vektorfelder X, Y, Z auf M $(k > 1)$ durch eine einfache Rechnung (siehe [7], S. 225) die sogenannte Jacobi-Identität der Lie-Klammer:

$$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] \equiv 0 \qquad \textit{auf} \quad M. \tag{2.4}$$

Da die Lie-Klammer $[\,\cdot,\cdot\,]$ ausserdem offensichtlich bilinear und antisymmetrisch ist, stellt sich somit der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\Gamma_\infty(M)$ aller C^∞-Vektorfelder auf M, ausgestattet mit $[\,\cdot,\cdot\,]$, als eine sogenannte „Lie-Algebra" heraus.
Ausserdem bemerke man, dass anhand von Proposition 2.2.4 die Lie-Kammer $[X,Y]$ zweier Vektorfelder X, Y mit konstanten Koeffizienten $\{X^i\}$, $\{Y^i\}$ bezüglich einer Karte (Ω, Φ) auf Ω identisch verschwindet, sodass insbesondere

$$[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] \equiv 0 \qquad \textit{auf} \quad \Omega \tag{2.5}$$

für die Elemente des sogenannten „lokalen Rahmens" $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1,\ldots,n}$ von $T\Omega$ gilt, welche also in jedem $q \in \Omega$ die kanonische Basis von T_qM mit Hilfe der Kartenabbildung Φ bilden, wie in (2.2) zumindest in $p \in M$ explizit angegeben.

2.3 Lineare Zusammenhänge und deren Krümmungen und Torsionen

Wir führen nun den zentralen Begriff des „linearen Zusammenhangs" bzw. der „kovarianten Ableitung" ∇ auf einer C^∞-Mannigfaltigkeit M ein, um ein Vektorfeld auf

M (in jedem Punkt $p \in M$) in Richtung eines anderen Vektorfeldes auf M ableiten und verschiedene Tangentialräume von M per *Paralleltransport* isometrisch aufeinander abbilden zu können. Wie wir sehen werden, sind die beiden „charakteristischen, differentialgeometrischen Masse" solch eines linearen Zusammenhangs ∇ deren sogenannte *Krümmung* R und *Torsion* T.

Definition 2.3.1 *Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit. Wir nennen eine ($\mathbb{R}$-) bilineare Abbildung $\nabla : \Gamma_k(M) \times \Gamma_{k+1}(M) \longrightarrow \Gamma_k(M)$, $(X, Y) \longmapsto \nabla_X(Y)$, einen „linearen Zusammenhang" bzw. eine „kovariante Ableitung" auf M, falls sie die beiden folgenden Eigenschaften besitzt:*
i) $\nabla_{(f\,X)}(Y) = f\,\nabla_X(Y)$, für jede diff.bare Funktion f auf M der Klasse C^k.
ii) $\nabla_X(f\,Y) = X(f)\,Y + f\,\nabla_X(Y)$, für jede diff.bare Funktion f auf M der Klasse C^{k+1}.

Bemerkung 2.3.1 *i) Auf $M = \mathbb{R}^n$ ist die gewöhnliche Richtungsableitung*

$$\nabla_X(Y)\mid_p := D_X(Y)\mid_p := \lim_{h\to 0} \frac{Y(p + hX(p)) - Y(p)}{h} = DY(p)\cdot X(p)$$

für ein beliebiges Paar $(X, Y) \in \Gamma_k(\mathbb{R}^n) \times \Gamma_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ von Vektorfeldern (im herkömmlichen Sinne der Analysis II) ein linearer Zusammenhang, falls $X_p(f)$ (wie bereits im Beweis von Proposition 2.2.3) als die klassische Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial X}(p) = (\nabla f)(p)\cdot X(p)$ einer Funktion $f \in C^{k+1}(\mathbb{R}^n)$ im Punkt p in Richtung $X(p)$ erklärt wird.
ii) Jedoch liefert ebenfalls die kompliziertere Vorschrift

$$\nabla_X(Y) := D_X(Y) + \frac{1}{2}(X \times Y)$$

einen linearen Zusammenhang auf dem $\mathbb{R}^3$.

Sei nun (Ω, Φ) eine Karte um einen beliebigen Punkt $p \in M$ und $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1,\ldots,n}$ der „lokale Rahmen" aus Tangential-Vektorfeldern von $T\Omega$ bzgl. dieser Karte, wie in (2.2) explizit definiert, sodass also $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ mit $X^i := X(\Phi^i)$ und $Y = \sum_{i=1}^n Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ mit $Y^i := Y(\Phi^i)$ auf Ω gilt. Da $\frac{\partial}{\partial x^i}$, $i = 1, \ldots, n$, C^∞-Vektorfelder auf $\Omega \subset M$ sind, ergibt sich aus den beiden Eigenschaften (i),(ii) von ∇ (geschrieben mit Summationskonvention):

$$\nabla_X(Y) = X^i\,\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\Big(Y^j\,\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = X^i\,\frac{\partial Y^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial}{\partial x^j} + X^i\,Y^j\,\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big). \tag{2.6}$$

Da $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big)$ wieder ein Element aus $\Gamma_\infty(\Omega)$ zu sein hat, können wir dieses wieder mittels des lokalen Rahmens $\{\frac{\partial}{\partial x^k}\}_{k=1,\ldots,n}$ darstellen, sodass also

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k\,\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{2.7}$$

für eindeutig bestimmte C^∞-Funktionen Γ_{ij}^k auf Ω gilt, die offenbar nur vom Zusammenhang ∇ und der Kartenabbildung Φ von Ω abhängen. Wir halten somit fest:

Definition 2.3.2 *Wir nennen die n^3 durch ∇ und eine Karte (Ω, Φ) eindeutig bestimmten C^∞-Funktionen $\Gamma_{ij}^k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ die „Christoffel-Symbole" des linearen Zusammenhangs ∇ in Bezug auf die Karte (Ω, Φ).*

Sind nun umgekehrt eine Karte (Ω, Φ) einer C^∞-Mannigfaltigkeit M und n^3 C^∞-Funktionen $\Gamma_{ij}^k : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben, so erhalten wir durch Kombination der Gleichungen (2.6) und (2.7) eine exakte Vorschrift für eine kovariante Ableitung $\nabla_X(Y)$, also einen linearen Zusammenhang ∇, zumindest auf Ω. Somit existieren also zumindest lokal (!) auf jeder C^∞-Mannigfaltigkeit M beliebig viele Zusammenhänge. Auf die Frage nach der globalen Existenz einer (kanonischen) kovarianten Ableitung auf M kommen wir erst später nach Ausstattung von M mit einer „Riemannschen Metrik" g zurück. Nun gelangen wir erst einmal zu

Definition 2.3.3 *Die* Krümmung $R : \Gamma_\infty(M) \times \Gamma_\infty(M) \longrightarrow \mathrm{Hom}(\Gamma_\infty(M), \Gamma_\infty(M))$ *eines Zusammenhangs ∇ auf M ist definiert durch*

$$(X, Y) \longmapsto R(X, Y) := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X,Y]}.$$

Wie in einer Übungsaufgabe zu berechnen ist, gilt die folgende

Proposition 2.3.1 *Sind M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, (Ω, Φ) eine Karte von M und ∇ ein Zusammenhang auf Ω mit Christoffel-Symbolen $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(\Omega)$, so gilt für die Koeffizienten $[R(X, Y)Z]^k$ des Vektorfeldes $R(X, Y)Z \in \Gamma_\infty(M)$ bezüglich des lokalen Rahmens $\{\frac{\partial}{\partial x^k}\}_{k=1,\ldots,n}$ von $T\Omega$ (bzgl. Φ) die Formel:*

$$[R(X, Y)Z]^k = X^i Y^j Z^l \Big(\frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{im}^k \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{jm}^k \Gamma_{il}^m \Big),$$

für beliebige Vektorfelder $X, Y, Z \in \Gamma_\infty(M)$, mit den Koeffizienten X^i, Y^i, Z^i bzgl. $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1,\ldots,n}$. Insbesondere ergibt sich also für $R_{lij}^k := \Big(R\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big)\frac{\partial}{\partial x^l}\Big)^k$ die bereits aus der Hyperflächen-Theorie „vertraut erscheinende Formel":

$$R_{lij}^k = \frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{im}^k \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{jm}^k \Gamma_{il}^m. \tag{2.8}$$

Wir folgern direkt aus der Definition der R_{lij}^k anhand der offensichtlichen Antisymmetrie $R(X, Y) = -R(Y, X)$ die ebenfalls „vertraut erscheinenden" Relationen $R_{lij}^k = -R_{lji}^k$, in Übereinstimmung mit Formel (2.8). Kombinieren wir Proposition 2.3.1 mit Formel (2.5), so erhalten wir für ein Tripel von Vektorfeldern der speziellen Form $\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, Z$ auf einer Karte (Ω, Φ) bei Beachtung der Definition 2.3.3 von R:

$$\sum_{k=1}^n \Big([\nabla_i \nabla_j (Z)]^k - [\nabla_j \nabla_i (Z)]^k \Big) \frac{\partial}{\partial x^k} = R\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) Z = \sum_{l,k=1}^n R_{lij}^k \, Z^l \, \frac{\partial}{\partial x^k}, \tag{2.9}$$

auf Ω, wobei wir von nun an die Abkürzung ∇_i für $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}$ bei Rechnungen mittels lokaler Karten verwenden werden.

Für den kanonischen Zusammenhang $\nabla_X(Y)\mid_p := D_X(Y)\mid_p := DY(p)\cdot X(p)$ auf $M = \mathbb{R}^n$ aus Beispiel 2.3.1 (i), für ein beliebiges Paar $(X,Y) \in \Gamma_k(\mathbb{R}^n) \times \Gamma_{k+1}(\mathbb{R}^n)$ $(k > 1)$ klassisch definierter Vektorfelder, gilt nun gerade mit der dortigen Vereinbarung „$X_p(f) = \frac{\partial f}{\partial X}(p) = (\nabla f)(p) \cdot X(p)$":

$$\begin{aligned}(\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X))\mid_p (f) = \nabla f(p)\cdot(DY(p)\cdot X(p)) - \nabla f(p)\cdot(DX(p)\cdot Y(p))\\ = \langle D^2 f(p)\cdot X_p, Y_p\rangle + \nabla f(p)\cdot(DY(p)\cdot X(p))\\ -\langle D^2 f(p)\cdot Y_p, X_p\rangle - \nabla f(p)\cdot(DX(p)\cdot Y(p))\\ = X_p(Y(f)) - Y_p(X(f)) \equiv [X,Y]_p(f),\end{aligned}$$

für jede Funktion $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$, anhand der Symmetrie ihrer Hesseschen Matrix $D^2 f(p)$, also $\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y] \equiv 0$ auf ganz $\mathbb{R}^n$. Jedoch sieht man anhand dieser Rechnung auch, dass für den etwas komplizierter definierten Zusammenhang $\nabla_X(Y) := D_X(Y) + \frac{1}{2}(X \times Y)$ auf dem $\mathbb{R}^3$ aus Beispiel 2.3.1 (ii) folglich

$$\nabla_X(Y) - \nabla_Y(X) - [X,Y] = [X,Y] + \frac{1}{2}(X\times Y) - \frac{1}{2}(Y \times X) - [X,Y] = X \times Y$$

auf dem $\mathbb{R}^3$ gilt. Diese beiden Beispiele motivieren die Einführung und Untersuchung eines weiteren „charakteristischen Masses" eines Zusammenhangs, der sogenannten *Torsion*:

Definition 2.3.4 *Die „Torsion" $T : \Gamma_\infty(M) \times \Gamma_\infty(M) \longrightarrow \Gamma_\infty(M)$ eines Zusammenhangs ∇ auf einer C^∞-Mannigfaltigkeit M ist definiert durch*

$$(X,Y) \longmapsto T(X,Y) := \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Wann genau verschwindet nun die Torsion T eines Zusammenhangs auf einer beliebigen C^∞-Mannigfaltigkeit M identisch ? Zur Beantwortung dieser Frage sollten wir die Koeffizienten des Vektorfeldes $T(X,Y)$ in Bezug auf einen lokalen Rahmen $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1,\ldots,n}$ von $T\Omega$, bzgl. einer Karte (Ω,Φ) von M, berechnen. Aus Proposition 2.2.4, (2.6) und (2.7) erhalten wir für den j-ten Koeffizienten von $T(X,Y)$:

$$\begin{aligned}[T(X,Y)]^j = X^i\,\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + X^i\,Y^k\Big(\nabla_i\Big(\frac{\partial}{\partial x^k}\Big)\Big)^j - Y^i\,\frac{\partial X^j}{\partial x^i} - Y^i\,X^k\Big(\nabla_i\Big(\frac{\partial}{\partial x^k}\Big)\Big)^j \quad (2.10)\\ -\Big(X^i\,\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i\,\frac{\partial X^j}{\partial x^i}\Big)\\ = X^i\,Y^k\,\Gamma^j_{ik} - Y^i\,X^k\Gamma^j_{ik} \equiv X^i\,Y^k\,(\Gamma^j_{ik} - \Gamma^j_{ki}), \quad (2.11)\end{aligned}$$

für beliebige $X,Y \in \Gamma_\infty(M)$, wobei wir für die letzte Gleichung lediglich eine teilweise Umbenennung der Indizes $(i,k) \leftrightarrow (k,i)$ vornahmen. Somit gilt also insbesondere

$T(X,Y) \equiv 0$ auf Ω, $\forall\, X, Y \in \Gamma_\infty(M)$, falls alle sogenannten ,,Torsions-Koeffizienten" $T^j_{ik} := \Gamma^j_{ik} - \Gamma^j_{ki}$ von ∇ auf Ω identisch verschwinden, d.h. falls die Christoffel-Symbole Γ^j_{ik} von ∇ symmetrisch im ,,unteren Indexpaar" (i,k) auf Ω sind. Man bemerke hier, dass diese Symmetrie-Eigenschaft der Christoffel-Symbole in der ,,euklidischen Hyperflächen-Theorie" direkt aus deren dortiger Definition, nämlich aus

$$\Phi_{x_i x_k}(x) = \Gamma^j_{ik}(x)\, \Phi_{x_j}(x) + b(x)\, N \circ \Phi(x),$$

für jede C^2-Parametrisierung $\Phi : \Omega \xrightarrow{\cong} U \subset S$, folgt. Somit ist also jeder ,,euklidische Zusammenhang" ∇ auf einer parametrisierbaren Teilmenge U einer Hyperfläche S des $\mathbb{R}^{n+1}$, welcher mittels (2.6) und (2.7) aus den a priori ,,symmetrischen" Christoffel-Symbolen $\Gamma^j_{ik} \equiv \Gamma^j_{ki}$ auf U gebildet wird, automatisch torsionsfrei.

2.4 Riemannsche Metriken und Zusammenhänge

Sei V ein beliebiger, endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, V^* sein Dualraum, also der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Linearformen auf V, und $(V \otimes V)^*$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Bilinearformen auf V (man sehe S. 330–335 in [5] für eine präzise Einführung des ,,Tensorprodukts" endlich-dimensionaler Vektorräume). Wir interessieren uns besonders für dessen Teilmenge $SP(V)$ aller *positiv-definiter, symmetrischer* Bilinearformen, also aller *Skalarprodukte* auf V. Im Gegensatz zu $(V \otimes V)^*$ ist $SP(V)$ nur noch ein ,,Kegel" über $\mathbb{R}_+$, d.h. sind $\alpha_1, \alpha_2 \in SP(V)$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}_+$, so ist auch $\lambda\alpha_1 + \mu\alpha_2 \in SP(V)$.
Zu einer beliebig vorgegebenen C^∞-Mannigfaltigkeit M ist somit das ,,Kegel-Bündel" $SP(M) := \coprod_{p\in M} \{p\} \times SP(T_pM)$ im ,,tensorierten Kotangentialbündel"

$$(T \otimes T)^*(M) := \coprod_{p\in M} \{p\} \times (T_pM \otimes T_pM)^* \xrightarrow{\Pi_M} M, \tag{2.12}$$

mit seiner kanonischen Projektion Π_M, welche also $\Pi_M^{-1}(p) = \{p\} \times (T_pM \otimes T_pM)^*$ $\forall p \in M$ erfüllt, enthalten. Ist $\Psi : M_1 \xrightarrow{\cong} M_2$ ein C^∞-Diffeomorphismus zwischen zwei C^∞-Mannigfaltigkeiten M_1, M_2, so definieren wir $(T \otimes T)^*(\Psi) : (T \otimes T)^*(M_2) \longrightarrow (T \otimes T)^*(M_1)$ durch die Vorschrift

$$(T \otimes T)^*(\Psi) : (p, \alpha) \longmapsto (\Psi^{-1}(p), \alpha((T\Psi)_{\Psi^{-1}(p)}(\cdot), (T\Psi)_{\Psi^{-1}(p)}(\cdot)). \tag{2.13}$$

Genau wie Proposition 2.2.3 beweist man

Proposition 2.4.1 *Ist M eine C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension n, so ist $(T \otimes T)^*(M)$ eine C^∞-Mannigfaltigkeit der Dimension $n + n^2 = n(n+1)$. $(T \otimes T)^*$ ist durch die beiden obigen Vorschriften (2.12), (2.13) ein kontravarianter Funktor. $(T \otimes T)^*$ verwandelt also die Verkettung $\Phi \circ \Psi$ zweier C^∞-Diffeomorphismen $\Psi : M_1 \xrightarrow{\cong} M_2$, $\Phi : M_2 \xrightarrow{\cong} M_3$ in den C^∞-Diffeomorphismus $(T\otimes T)^*(\Phi\circ\Psi) = (T\otimes T)^*(\Psi)\circ(T\otimes T)^*(\Phi)$ von $(T \otimes T)^*(M_3)$ nach $(T \otimes T)^*(M_1)$.*

Bemerkung 2.4.1 *Man bemerke hierzu noch, dass der Dualraum $(V \otimes W)^*$ des Tensorprodukts zweier endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorräume kanonisch isomorph zum Tensorprodukt $V^* \otimes W^*$ der jeweiligen Dualräume ist, denn ist $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $\{w_1, \ldots, w_m\}$ eine Basis von W, so ist einerseits $\{(v_i \otimes w_j)^*\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1\ldots,m}$ eine Basis von $(V \otimes W)^*$ und andererseits $\{v_i^* \otimes w_j^*\}_{i=1,\ldots,n}^{j=1\ldots,m}$ eine Basis von $V^* \otimes W^*$, sodass also die eindeutige lineare Fortsetzung der Zuordnungen $(v_i \otimes w_j)^* \longmapsto v_i^* \otimes w_j^*$ den behaupteten Isomorphismus liefert (man sehe hierzu auch [5], S. 337–338). Somit erhalten wir insbesondere einen kanonischen Bündel-Isomorphismus zwischen dem in (2.12) eingeführten Vektorraum-Bündel $(T \otimes T)^*(M)$ und dem Vektorraum-Bündel $(T^* \otimes T^*)(M) := \coprod_{p \in M} \{p\} \times ((T_pM)^* \otimes (T_pM)^*)$ und sogar eine sogenannte „natürliche Äquivalenz" zwischen den Funktoren $(T \otimes T)^*$ und $T^* \otimes T^*$, falls wir die kontravariante Wirkung von $T^* \otimes T^*$ auf C^∞-Diffeomorphismen $\Psi : M_1 \xrightarrow{\cong} M_2$ zwischen zwei C^∞-Mannigfaltigkeiten ebenfalls durch die Vorschrift (2.13) definieren.*

Definition 2.4.1 *Eine Riemannsche Metrik g auf einer diff.baren Mannigfaltigkeit M der Klasse C^∞ ist ein „C^∞-Schnitt" des Kegel-Bündels $SP(M)$, d.h. eine diff.bare Abbildung $g : M \longrightarrow SP(M) \subset (T \otimes T)^*(M)$ der Klasse C^∞ mit $\Pi_M \circ g = id_M$. Mit anderen Worten:*
Eine Riemannsche Metrik g ordnet jedem Punkt $p \in M$ eine positiv-definite, symmetrische Bilinearform auf T_pM zu, und ist (Ω, Φ) eine Karte von M und $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1,\ldots,n}$ der „lokale Rahmen" von $T\Omega$ bzgl. dieser Karte, so sind die sogenannten Koeffizienten

$$g_{ij}(p) := g_p\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big)$$

von g (bzgl. (Ω, Φ)) C^∞-Funktionen von $p \in M$.

Anhand der Kegelstruktur der „Fasern" $Sp(T_pM)$ von $SP(M)$ bildet offenbar die Menge $RM(M)$ aller Riemannschen Metriken auf M ebenfalls einen Kegel über $\mathbb{R}_+$. Man nennt ein Paar (M, g) aus einer C^∞-Mannigfaltigkeit M und einer auf ihr definierten Riemannschen Metrik g eine „Riemannsche Mannigfaltigkeit".
Auf (M, g) können somit „Längen" von Tangentialvektoren $X \in T_pM$ durch $\|X\|_g := \sqrt{g_p(X, X)}$ und von diff.baren Kurven $\gamma : [0, 1] \longrightarrow M$ durch

$$\mathcal{L}_g(\gamma) := \int_0^1 \sqrt{g_{\gamma(t)}((T\gamma)_t(e_1), (T\gamma)_t(e_1))}\, dt \tag{2.14}$$

definiert und berechnet werden, wofür wir den konstanten „Rahmen" $e_1 \equiv \frac{d}{dt}$ von $T\mathbb{R}$ verwenden.

Bemerkung 2.4.2 *i) Ist S eine C^∞-Hyperfläche des $\mathbb{R}^{n+1}$, so ist durch $g_z(v, w) := \langle v, w \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$, $\forall\, z \in S$, also durch die von z unabhängigen Einschränkungen des euklidischen Skalarprodukts des $\mathbb{R}^{n+1}$ auf die jeweiligen Tangentialräume T_zS, eine Riemannsche Metrik auf S gegeben. Ist weiterhin (Ω, Φ) eine Karte von S, also $\Psi := \Phi^{-1}$ eine lokale Parametrisierung von $\Omega \subset S$, und $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1,\ldots,n}$ der „lokale Rahmen" von $T\Omega$ bzgl.*

dieser Karte, so sind wegen $\frac{\partial}{\partial x^i}\mid_{\Psi(x)}(f) = \langle \nabla f(\Psi(x)), \Psi_{x_i}(x)\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} \equiv \Psi_{x_i}(x)(f)$ *die Koeffizienten*

$$g_{ij}(z) \equiv g_z\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\Big) = \langle \Psi_{x_i}(x), \Psi_{x_j}(x)\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$$

dieser „euklidischen Metrik" g im Punkt $z = \Psi(x)$ *(bzgl.* (Ω, Φ)*) gerade durch die uns vertrauten Koeffizienten* $g^{\Psi}_{ij}(x) := I(\Psi_{x_i}(x), \Psi_{x_j}(x)) := \langle \Psi_{x_i}(x), \Psi_{x_j}(x)\rangle_{\mathbb{R}^{n+1}}$ *der „ersten Fundamentalform" von* Ψ *gegeben.*
ii) Sei $M := Q := [0, 2\pi)^2$*, sodass also ein globaler, konstanter Rahmen durch* $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\} \equiv \{(1,0),(0,1)\}$ *auf Q vorliegt. Für beliebige reelle Zahlen* $a > r > 0$ *betrachten wir nun die Parametrisierung* $\Psi(x,y) := ((r\cos x + a)\sin y, (r\cos x + a)\cos y, r\sin x)$*, für* $(x,y) \in [0,2\pi)^2$*, eines Torus' T im* $\mathbb{R}^3$*, welcher zusammen mit seiner „euklidischen Metrik"* e^T *aus (i) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist. Nun können wir mittels des Funktors* $(T \otimes T)^*$ *in Anwendung auf* Ψ *diese „euklidische Metrik"* e^T *von T – also diesen speziellen Schnitt ins Faserbündel SP(T) – zu einer Riemannschen Metrik g des Quadrats Q – also zu einem ganz bestimmten Schnitt ins Faserbündel SP(Q) – vermöge*

$$\begin{aligned} g_{(x,y)}(v,w) &:= [(T\otimes T)^*(\Psi)(\Psi((x,y)), e^T)](v,w) \\ \equiv \langle (T\Psi)_{(x,y)}(v), (T\Psi)_{(x,y)}(w)\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \langle D\Psi((x,y))\cdot v, D\Psi((x,y))\cdot w\rangle_{\mathbb{R}^3}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

für beliebige $(x,y) \in Q$ *und* $v, w \in T_{(x,y)}Q \equiv \mathbb{R}^2$*, „zurückziehen". Die Koeffizienten dieser Metrik g bzgl. des globalen Rahmens* $\{(1,0),(0,1)\}$ *von Q sind somit* $g_{11}((x,y)) = \langle \Psi_x((x,y)), \Psi_x((x,y))\rangle_{\mathbb{R}^3} \equiv r^2$*,* $g_{22}((x,y)) = \langle \Psi_y((x,y)), \Psi_y((x,y))\rangle_{\mathbb{R}^3} = (r\cos x + a)^2$ *und* $g_{12}((x,y)) = g_{21}((x,y)) = \langle \Psi_x((x,y)), \Psi_y((x,y))\rangle_{\mathbb{R}^3} \equiv 0$*. Wir haben also die zunächst „platte" Mannigfaltigkeit Q durch Ausstattung mit dieser von* (T, e^T) *„zurückgezogenen Riemannschen Metrik"* $g := (T\otimes T)^*(\Psi)(\Psi(\cdot), e^T)$ *zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit „verkrümmt", die per deren Konstruktion, also anhand der Vorschrift in (2.15), von* Ψ isometrisch *diffeomorph auf den gewöhnlichen Torus* (T, e^T) *im* $\mathbb{R}^3$ *abgebildet wird, sodass also die Koeffizienten* g_{ij} *von g mit denjenigen der ersten Fundamentalform der Parametrisierung* Ψ *von T punktweise auf Q übereinstimmen !*
iii) Versehen wir die obere Halbebene $\mathbb{H} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ *(wieder unter Zuhilfenahme des globalen, konstanten Rahmens* $\{(1,0),(0,1)\}$*) mit der Riemannschen Metrik*

$$g_{(x,y)}(v,w) := \frac{v^1w^1 + v^2w^2}{y^2} \tag{2.16}$$

für beliebige $(x,y) \in \mathbb{H}$ *und* $v, w \in T_{(x,y)}\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^2$*, so nennen wir das Paar* $(\mathbb{H}, g)$ *die „Poincaré-Halbebene". Die Koeffizienten von g sind offenbar* $g_{11}((x,y)) = \frac{1}{y^2} = g_{22}((x,y))$ *und* $g_{12} \equiv 0$*. Beide Rahmenvektoren* $(1,0),(0,1)$ *haben also im Punkt* $(x,y) \in \mathbb{H}$ *bzgl. g die Länge* $\sqrt{g_{11}((x,y))} = \frac{1}{y} = \sqrt{g_{22}((x,y))}$*. Wie in einer Übungsaufgabe zu zeigen ist, minimieren Segmente von zur y-Achse parallelen Geraden und von Halbkreisen mit Zentrum auf der x-Achse das Längen-Funktional*

$$\mathcal{L}_g(\gamma) := \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\gamma(t)}((T\gamma)_t(e_1), (T\gamma)_t(e_1))}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\sqrt{\big(\dot\gamma^1(t)\big)^2 + \big(\dot\gamma^2(t)\big)^2}}{\gamma^2(t)}\, dt$$

innerhalb der Klasse aller diff.barer Kurven $\gamma : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{H}$ *mit vorgegebenen Anfangs- und Endpunkten. Insbesondere verbindet die Gerade* $\gamma(t) := (0, t)$ *die Punkte* $(0, t_1), (0, t_2)$ *mit der minimalen Länge* $\log(t_2/t_1)$*, welche also für* $t_1 \searrow 0$ *nach unendlich strebt.*

Mittels Partitionen der Eins auf einer (nach Voraussetzung parakompakten) C^∞-Mannigfaltigkeit M kann man auf M eine Vielzahl Riemannscher Metriken explizit konstruieren, sodass also insbesondere $RM(M)$ nicht leer sein kann.

Nun kommen wir zum zentralen Objekt der Riemannschen Geometrie:

Definition 2.4.2 *Wir nennen einen Zusammenhang* ∇ *auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit* (M, g) *Riemannsch, falls er die beiden zusätzlichen Eigenschaften*
i) $X(g_{(\cdot)}(Y, Z)) = g_{(\cdot)}(\nabla_X(Y), Z) + g_{(\cdot)}(Y, \nabla_X(Z))$ *auf* M,
ii) $T^\nabla(X, Y) \equiv \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \equiv 0$ *auf* M*, für beliebige Vektorfelder* $X, Y, Z \in \Gamma_\infty(M)$ *besitzt.*

In der Tat ist der kanonische Zusammenhang $\nabla_X(Y) \mid_p := D_X(Y) \mid_p := DY(p) \cdot X(p)$ auf $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n})$ Riemannsch. Der Zusammenhang $\nabla_X(Y) := D_X(Y) + \frac{1}{2}(X \times Y)$ auf $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3})$ ist hingegen nicht mehr Riemannsch, da er die nicht-verschwindende Torsion $T^\nabla(X, Y) = X \times Y$ auf $\mathbb{R}^3$ besitzt. Aber immerhin erfüllt er die erste Bedingung aus Definition 2.4.2:

$$\begin{aligned} X(\langle Y, Z\rangle) &= \langle D_X(Y), Z\rangle + \langle Y, D_X(Z)\rangle \\ = \langle D_X(Y), Z\rangle + \frac{1}{2}\det(X, Y, Z) &+ \langle Y, D_X(Z)\rangle + \frac{1}{2}\det(Y, X, Z) \\ = \langle D_X(Y) + \frac{1}{2}(X \times Y), Z\rangle + \langle Y, D_X(Z) + \frac{1}{2}(X \times Z)\rangle &= \langle \nabla_X(Y), Z\rangle + \langle Y, \nabla_X(Z)\rangle \end{aligned}$$

auf $\mathbb{R}^3$, für beliebige $X, Y, Z \in \Gamma_\infty(\mathbb{R}^3)$.
Und in der Tat ist $\nabla_X(Y) := D_X(Y)$ auf $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathbb{R}^3})$ der einzige Riemannsche Zusammenhang, denn es folgt noch viel allgemeiner mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes:

Theorem 2.4.1 *Auf jeder Riemannschen Mannigfaltigkeit* (M, g) *existiert genau ein Riemannscher Zusammenhang.*

Beweis: Nehmen wir zunächst an, dass ein Riemannscher Zusammenhang ∇ auf (M, g) existiere. So folgern wir aus den beiden zusätzlichen Eigenschaften solch eines Zusammenhangs ∇ aus Definition 2.4.2:

$$\begin{aligned} &X(g_{(\cdot)}(Y, Z)) + Y(g_{(\cdot)}(X, Z)) - Z(g_{(\cdot)}(X, Y)) \\ = g_{(\cdot)}(Y, \nabla_X(Z) - \nabla_Z(X)) &+ g_{(\cdot)}(X, \nabla_Y(Z) - \nabla_Z(Y)) + g_{(\cdot)}(Z, \nabla_X(Y) + \nabla_Y(X)) \\ &= g_{(\cdot)}(Y, [X, Z]) + g_{(\cdot)}(X, [Y, Z]) + g_{(\cdot)}(Z, 2\nabla_X(Y) + [Y, X]), \end{aligned}$$

für beliebige Vektorfelder $X, Y, Z \in \Gamma_\infty(M)$. Somit erhalten wir also für die Paarung von $\nabla_X(Y)$ mit einem beliebigen C^∞-Vektorfeld Z die sogenannte ,,Koszul-Formel":

$$\begin{aligned} 2\, g_{(\cdot)}(\nabla_X(Y), Z) = {} & X(g_{(\cdot)}(Y, Z)) + Y(g_{(\cdot)}(X, Z)) - Z(g_{(\cdot)}(X, Y)) \\ & - g_{(\cdot)}(Y, [X, Z]) - g_{(\cdot)}(X, [Y, Z]) - g_{(\cdot)}(Z, [Y, X]). \end{aligned}$$

Existierte also ein weiterer Riemannscher Zusammenhang $\tilde{\nabla}$ auf M, so lieferte diese Formel in Anwendung auf $\tilde{\nabla}$ und ∇, dass $0 \equiv g_{(\cdot)}(\nabla_X(Y), Z) - g_{(\cdot)}(\tilde{\nabla}_X(Y), Z) = g_{(\cdot)}(\nabla_X(Y) - \tilde{\nabla}_X(Y), Z)$ für ein beliebiges Vektorfeld $Z \in \Gamma_\infty(M)$ gälte, woraus sich also $\nabla_X(Y) \equiv \tilde{\nabla}_X(Y)$ auf M für zwei beliebig fixierte Vektorfelder $X, Y \in \Gamma_\infty(M)$ anhand der (punktweisen) positiven Definitheit von g ergibt. Umgekehrt liefert die rechte Seite $L^g_{X,Y} := X(g_{(\cdot)}(Y, \cdot\,)) + Y(g_{(\cdot)}(X, \cdot\,)) - (\,\cdot\,)(g_{(\cdot)}(X, Y)) - g_{(\cdot)}(Y, [X, \cdot\,]) - g_{(\cdot)}(X, [Y, \cdot\,]) - g_{(\cdot)}(\,\cdot\,, [Y, X])$ der obigen „Koszul-Formel" einen C^∞-Schnitt $L^g_{X,Y} : M \longrightarrow (TM)^*$ ins Kotangentialbündel $(TM)^*$. Da $2\, g_p(\cdot, \cdot)$ in jedem Punkt $p \in M$ ein Skalarprodukt auf T_pM ist, existiert somit nach dem Rieszschen Darstellungssatz genau ein Vektor $V(X(p), Y(p)) \in T_pM$, welcher die Gleichung $2\, g_p(V(X(p), Y(p)), \cdot\,) = L^g_{X,Y}(p)$ in $(T_pM)^*$ löst. Setzen wir also $\nabla_X(Y) \mid p := V(X(p), Y(p))$, für jedes $p \in M$, so erhalten wir einen C^∞-Schnitt ins Tangentialbündel TM, d.h. zu jedem Vektorfeld-Paar (X, Y) ein weiteres Vektorfeld $\nabla_X(Y) \in \Gamma_\infty(M)$, welches per Konstruktion die obige Koszul-Formel auf M erfüllt. Diese Formel zeigt sofort, dass hiermit eine *bilineare* Abbildung $\nabla : \Gamma_\infty(M) \times \Gamma_\infty(M) \longrightarrow \Gamma_\infty(M)$ definiert wurde. Kombination der Koszul-Formel mit der „Produktregel" für die Anwendung von Tangentialvektoren auf Produkte fg diff.barer Funktionen und insbesondere mit Übungsaufgabe 16 (a) liefert weiterhin, dass diese Abbildung ∇ in der Tat die beiden zusätzlichen Eigenschaften eines linearen Zusammenhangs aus Definition 2.3.1 besitzt. Berechnen wir also für den Nachweis von $\nabla_{fX}(Y) = f\, \nabla_X(Y)$:

$$\begin{aligned}
2\, g(\nabla_{fX}(Y), Z) &= f\, X(g(Y, Z)) + Y(g(f\, X, Z)) - Z(g(f\, X, Y)) \\
&\quad - g(Y, [f\, X, Z]) - g(f\, X, [Y, Z]) - g(Z, [Y, f\, X]) \\
= f\, X(g(Y, Z)) + Y(f)\, g(X, Z) &+ f\, Y(g(X, Z)) - Z(f)\, g(X, Y) - f\, Z(g(X, Y)) \\
-g(Y, f\, [X, Z] - Z(f)\, X) &- f\, g(X, [Y, Z]) - g(Z, f\, [Y, X] + Y(f)\, X) \\
&= f\, X(g(Y, Z)) + f\, Y(g(X, Z)) - f\, Z(g(X, Y)) \\
&\quad - f\, g(Y, [X, Z]) - f\, g(X, [Y, Z]) - f\, g(Z, [Y, X]) \\
&= 2\, g(f\, \nabla_X(Y), Z), \qquad \forall\, Z \in \Gamma_\infty(M),
\end{aligned}$$

also in der Tat $\nabla_{fX}(Y) = f\, \nabla_X(Y)$ anhand der (punktweisen) positiven Definitheit von g. Ähnlich folgt die zweite Eigenschaft $\nabla_X(f\, Y) = f\, \nabla_X(Y) + X(f)\, Y$ eines Zusammenhangs aus:

$$\begin{aligned}
2\, g(\nabla_X(f\, Y), Z) &= X(g(f\, Y, Z)) + f\, Y(g(X, Z)) - Z(g(X, f\, Y)) \\
&\quad - g(f\, Y, [X, Z]) - g(X, [f\, Y, Z]) - g(Z, [f\, Y, X]) \\
= X(f)\, g(Y, Z) + f\, X(g(Y, Z)) &+ f\, Y(g(X, Z)) - Z(f)\, g(X, Y) - f\, Z(g(X, Y)) \\
-f\, g(Y, [X, Z]) - f\, g(X, [Y, Z]) &+ Z(f)\, g(X, Y) - f\, g(Z, [Y, X]) + X(f)\, g(Y, Z) \\
&= 2\, g(f\, \nabla_X(Y), Z) + 2\, g(X(f)\, Y, Z), \qquad \forall\, Z \in \Gamma_\infty(M).
\end{aligned}$$

Schliesslich folgt nur mittels Verwendung der Koszul-Formel, dass dieses ∇ sogar „kompatibel mit der Metrik g" und torsionsfrei ist, also den beiden weiteren Bedingungen an einen *Riemannschen* Zusammenhang aus Definition 2.4.2 genügt. Man sehe [7], S. 227–228, für eine exakte Ausführung dieser beiden letzten Rechnungen.

◇

Sei nun (M, g) eine beliebige Riemannsche Mannigfaltigkeit, (Ω, Φ) eine Karte auf M und $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1,\dots,n}$ der lokale Rahmen von $T\Omega$ bzgl. dieser Karte, so liefert die obige Koszul-Formel in Anwendung auf $X := \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y := \frac{\partial}{\partial x^j}$, $Z := \frac{\partial}{\partial x^k}$ wegen (2.5) und (2.7):

$$\Gamma_{ikj} := \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^{m}\, g_{mk} \equiv \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^{m}\, g\Big(\frac{\partial}{\partial x^m}, \frac{\partial}{\partial x^k}\Big)$$
$$= g\Big(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\Big), \frac{\partial}{\partial x^k}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}(g_{jk}) + \frac{\partial}{\partial x^j}(g_{ik}) - \frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij})\Big)$$

für die Christoffel-Symbole 1. Art und mittels Multiplikation mit der inversen Matrix (g^{kl}) schliesslich die ,,vertraute" Formel

$$\Gamma_{ij}^{l} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{\partial}{\partial x^i}(g_{jk}) + \frac{\partial}{\partial x^j}(g_{ik}) - \frac{\partial}{\partial x^k}(g_{ij})\Big) g^{kl} \tag{2.17}$$

für die Berechenbarkeit der Christoffel-Symbole 2. Art vermöge der 1.Ableitungen der Koeffizienten g_{ij} der vorgegebenen Metrik g. Man beachte, dass diese Formel natürlich nur für die Christoffel-Symbole des eindeutigen Riemannschen Zusammenhangs auf (M, g) gelten kann !

Betrachten wir beispielsweise die natürliche Verallgemeinerung von Beispiel (iii) in Bemerkung 2.4.2 auf beliebige Dimensionen, d.h. den n-dimensionalen *Hyperbolischen Raum* $(\mathbb{H}^n := \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, g)$, ausgestattet mit der Riemannschen Metrik

$$g_x(v, w) := \frac{\sum_{i=1}^{n} v^i w^i}{(x_n)^2},$$

für beliebige $x \in \mathbb{H}^n$ und $v, w \in T_x\mathbb{H}^n \equiv \mathbb{R}^n$, und mit seinem Riemannschen Zusammenhang ∇^g. Mittels Formel (2.17) lassen sich leicht dessen Christoffel-Symbole berechnen (Übungsaufgabe !):

$$\Gamma_{ij}^{k}(x) = \frac{1}{x_n}(-\delta_{jk}\delta_{in} - \delta_{ki}\delta_{jn} + \delta_{ij}\delta_{kn}).$$

In Kombination mit Formel (2.8) kann man hiermit für die Koeffizienten $R_{ijkl}(x) := \sum_{m=1}^{n} R_{ijk}^{m}(x) g_{ml}(x)$ des ,,Riemannschen Krümmungstensors" von $(\mathbb{H}^n, g)$ die Formel $R_{ijij}(x) = \frac{-1}{(x_n)^4}$ für alle Paare $i \neq j$ herleiten, woraus für die sogenannten *Schnittkrümmungen* $K_{ij}(x) := \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2}(x)$ von $(\mathbb{H}^n, g)$ in x sofort das erstaunliche Resultat $K_{ij} \equiv -1$, für alle Paare $i \neq j$, folgt. Insbesondere hat somit die durch $K_{\mathbb{H}} := K_{12} \equiv K_{21}$ definierte Gauss'sche Krümmung der ,,Poincaré-Halbebene" $(\mathbb{H}, g)$ den konstanten Wert -1, entgegen unserer bisherigen ,,euklidischen" Intuition für den Begriff der Gauss'schen Krümmung !
Dass der durch $K_M(x) := K_{12}(x) := \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}(x)$ definierte ,,Gauss'sche Krümmungsbegriff" auf einer Karte (Ω, Φ) einer beliebigen 2-dimensionalen C^∞-Mannigfaltigkeit M

von der Wahl der herangezogenen Karte (Ω, Φ) und somit von der Wahl des verwandten lokalen Rahmens $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\}$ unabhängig ist und daher tatsächlich eine ,,geometrische Eigenschaft" von M selbst misst, zeigt gerade diejenige Rechnung, welche zum Theorema Egregium aus der ,,klassischen Hyperflächen-Theorie" führte.

Literaturverzeichnis

[1] Aubin, T.: A Course in Differential Geometry, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 27 , American Math. Society, 2000.

[2] Bär, C.: Elementare Differentialgeometrie, Walter de Gruyter, Berlin-New York, 2001.

[3] Do Carmo, M.: Differentialgeometrie, Vieweg Verlag.

[4] Engelking, R.: General Topology, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.

[5] Fischer, G.: Lineare Algebra, 11. Auflage, Vieweg Verlag, Braunschweig/Wiesbaden, 1997.

[6] Jänich, K.: Topologie, 8. Auflage, Springer Verlag, Berlin, 2005.

[7] Kühnel, W.: Differential Geometry, 2nd edition, AMS, USA, 2006.

[8] Massey, W.S.: An Introduction to Algebraic Topology, Harcourt, Brace and World, New York, 1967.

[9] Stöcker, R., Zieschang, H.: Algebraische Topologie, 2. Auflage, Teubner Verlag, Stuttgart, 1994.

[10] J.A. Thorpe: Elementary Topics in Differential Geometry, Springer Verlag, Berlin.