Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

WS 09/10
19.10.2009
Prof. Dr. U. Dierkes, Dr. habil. R. Jakob

1. Übungsblatt zur Vorlesung
Differentialgeometrie II

Aufgabe 1:

a) Man berechne explizit die ,,geodätischen Polarkoordinaten" der 2-Sphäre $\mathbb{S}^2$ um ihren Südpol $z_0 := (0,0,-1)$. D.h., man gebe eine explizite Formel für $\exp_{z_0}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$, $r \in [0,R)$, $\varphi \in [0,2\pi)$ an, wobei $\exp_{z_0} : T_{z_0}\mathbb{S}^2 \longrightarrow \mathbb{S}^2$ die Exponentialabbildung in z_0 an die $\mathbb{S}^2$ sei und wir die Tangentialvektoren $v \in T_{z_0}\mathbb{S}^2 \cong \mathbb{R}^2$ durch gewöhnliche Polarkoordinaten $(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$ darstellen. (3)

b) Welche geschlossene Kurve in $T_{z_0}\mathbb{S}^2$ wird auf den Äquator der $\mathbb{S}^2$ von $\exp_{z_0}$ abgebildet ? Ist dies vielleicht ein Kreis ? Und falls ja, welchen Radius hat dieser ? Was ist der Domain $\mathcal{D}$ von $\exp_{z_0}$, und was ist die maximale Teilmenge $\mathcal{D}^*$ von $\mathcal{D}$, auf der $\exp_{z_0}$ noch injektiv, also diffeomorph ist ? Ist $\mathcal{D}^*$ vielleicht eine offene Kreisscheibe $B_R(0)$? Und falls ja, welchen Wert hat dieser maximale Radius R, und worauf wird deren Rand $\partial B_R(0)$ von $\exp_{z_0}$ abgebildet ? (2)
Hinweis: Man muss sich bei dieser Aufgabe nur ein Bild aller Geodäten auf der 2-Sphäre verschaffen, die im Südpol z_0 starten.

Aufgabe 2:

a) Sei S eine 2-dimensionale, orientierbare Untermannigfaltigkeit der Klasse C^7 des $\mathbb{R}^3$ mit *konstanter* Gauss-Krümmung K, und sei $\Phi(r,\varphi) := \exp_{z_0}(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$, $r \in (0,R)$, die ,,geodätische Polar-Parametrisierung" einer kleinen Umgebung eines beliebig fixierten Punktes $z_0 \in S$. Man berechne die Koeffizienten g_{ij} der ersten Fundamentalform von Φ ! Welche Differentialgleichung muss das $\lambda := \sqrt{g_{22}}$ mit welchen Anfangsbedingungen lösen, und wie lauten deren Lösungen explizit in den drei zu unterscheidenden Fällen $K > 0$, $K = 0$, $K < 0$? (3)

b) Sind demnach zwei orientierbare Flächen S_1, S_2 mit übereinstimmender, konstanter Gauss-Krümmung K lokal isometrisch ? Präzise gefragt, gibt es zu einem beliebigen Paar von Punkten $(z_1, z_2) \in S_1 \times S_2$ Umgebungen U_{z_j} von z_j in S_j, $j = 1,2$, und eine Abbildung $\Psi : U_{z_1} \xrightarrow{\cong} U_{z_2}$, die $U_{z_1} \setminus \{z_1\}$ diffeomorph auf $U_{z_2} \setminus \{z_2\}$ abbildet und ausserdem die ,,lokale Isometrie-Relation"

$$\langle D\Psi(z)v, D\Psi(z)w\rangle = \langle v, w\rangle, \qquad \forall\, v, w \in T_z S_1, \tag{1}$$

$\forall\, z \in U_{z_1} \setminus \{z_1\}$ erfüllt ? (2)
Hinweis: Man versuche, für die Konstruktion solch eines Diffeomorphismus' Ψ „geodätische Polar-Parametrisierungen" von U_{z_1} und U_{z_2} zu verwenden.

Aufgabe 3:

a) Sei nun $S_1 := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ und S_2 der Kegel $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1^2 + 3x_2^2 - x_3^2 = 0, x_3 > 0\}$. Sind S_1 und S_2 (im obigen Sinne) lokal isometrisch zueinander ? Liefert vielleicht die Abbildung

$$\psi(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) := \frac{1}{2}(r\,\cos(2\theta), r\,\sin(2\theta), \sqrt{3}\,r)$$

sogar eine globale Isometrie von einer gewissen offenen Teilmenge $\tilde{S}_1$ von S_1 auf den „aufgeschnittenen Kegel" $\tilde{S}_2 := (S_2$ ohne eine bestimmte Ursprungsgerade in $S_2)$? D.h., liefert ψ einen Diffeomorphismus von $\tilde{S}_1$ auf $\tilde{S}_2$, welcher ausserdem die Isometrie-Relation (**??**) in jedem Punkt $z \in \tilde{S}_1$ erfüllt ? (3)
Hinweis: Hier einfach nur rechnen und dann den guten, alten Umkehrsatz (lokal) anwenden.

b) Ist ein beliebiger Zylinder im $\mathbb{R}^3$ zu einem beliebigen Kegel im $\mathbb{R}^3$ lokal isometrisch ? Und können die 2-Sphäre und ein beliebiger Zylinder Z im $\mathbb{R}^3$ lokal isometrisch zueinander sein ? Präzise gefragt, kann es um einen (beliebigen) festen Punkt der $\mathbb{S}^2$ eine Umgebung U_1 geben, die von einer Abbildung Ψ auf eine offene Teilmenge U_2 von Z diffeomorph abgebildet wird, welche ausserdem die Isometrie-Relation (**??**) in jedem Punkt von U_1 erfüllt ? (2)
Hinweis: Man verwende das Theorema Egregium zur Herleitung eines Widerspruchs !

Abgabe: Am 30.10.09, bitte !