Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

WS 09/10
23.01.2010
Dr. habil. R. Jakob

10. Übungsblatt zur Vorlesung
Differentialgeometrie II

Aufgabe 20:

Wir untersuchen die obere „Poincaré-Halbebene" ($\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}, g$), ausgestattet mit der Riemannschen Metrik

$$g_{(x,y)}(v, w) := \frac{v^1 w^1 + v^2 w^2}{y^2}$$

für beliebige $(x, y) \in \mathbb{H}$ und $v, w \in T_{(x,y)}\mathbb{H} \equiv \mathbb{R}^2$, und mit dem globalen, konstanten Rahmen $\{e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)\}$.

a) Man beweise zunächst, dass jede *Möbius-Transformation* $f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ eine Isometrie von $(\mathbb{H}, g)$ nach $(\mathbb{H}, g)$ liefert, falls ihre Koeffizienten a, b, c, d reell sind und $ad - bc = 1$ erfüllen. D.h., man zeige zuerst, dass $f(\mathbb{H}) \subset \mathbb{H}$ gilt und zweitens dass f in jedem Punkt $z = x+iy \in \mathbb{H}$ die Isometrie-Relation $g_{f(z)}(Df(z)\cdot v, Df(z)\cdot w) = g_z(v, w), \forall\, v, w \in T_z\mathbb{H}$ erfüllt. (3)
Tip: Man beachte, dass jedes solche f auf $\mathbb{H}$ holomorph ist und somit die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt !

b)* Man zeige, dass solch ein f ein Segment $\{(0, t) \mid t \in (t_1, t_2)\}$ der imaginären Achse $i\mathbb{R}$ entweder in eine zu dieser parallele Gerade (im Falle $c = 0$ oder $d = 0$) oder in einen Halbkreis $\partial B_r^+((x_0, 0))$ mit Zentrum $(x_0, 0)$ auf der reellen Achse (im Falle $c, d \neq 0$) abbildet. Wie lassen sich x_0 und r aus a, b, c, d exakt ermitteln ? (3)

c) Man beweise, dass die Kurve $c(t) := (0, t)$ die Punkte $(0, t_1)$ und $(0, t_2)$ mit minimaler Länge, nämlich $\log(t_2/t_1)$, miteinander verbindet, also dass für jede diff.bare Kurve $\gamma : [t_1, t_2] \longrightarrow \mathbb{H}$ mit $\gamma(t_1) = (0, t_1)$ und $\gamma(t_2) = (0, t_2)$

$$\mathcal{L}_g(\gamma) := \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{\gamma(t)}((T\gamma)_t(e_1), (T\gamma)_t(e_1))}\, dt \geq \mathcal{L}_g(c) = \log\big(t_2/t_1\big)$$

gilt. Welche Kurve verbindet somit die Bildpunkte $f(it_1)$ und $f(it_2)$ unter einer Möbius-Transformation $f(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ (wie in Teil (a)) mit minimaler Länge, und wie lang ist diese (wenn man das Resultat aus Teil (a) bedenkt) ? Und wie muss die Spur dieser längenminimierenden Verbindungskurve im Hinblick auf das Resultat aus Teil (b) aussehen ? (2)

Aufgabe 21:

Betrachten wir nun etwas allgemeiner den *Hyperbolischen Raum* $(\mathbb{H}^n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}, g)$, ausgestattet mit der Riemannschen Metrik

$$g_x(v, w) := \frac{\sum_{i=1}^n v^i w^i}{(x_n)^2},$$

für beliebige $x \in \mathbb{H}^n$ und $v, w \in T_x\mathbb{H}^n \equiv \mathbb{R}^n$, und mit dem (zu g gehörenden) Riemannschen Zusammenhang ∇^g. Wir bezeichnen im Folgenden mit $(g_{ij})(x) := g_x(e_i, e_j)$ die Koeffizienten-Matrix von g bzgl. des konstanten, kanonischen Rahmens $\{e_1, \ldots, e_n\}$, mit $(g^{ij})(x)$ ihre inverse Matrix und mit Γ_{ij}^k die Christoffel-Symbole zu ∇^g.

a) Man beweise zuerst mittels der vertrauten Formel $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij}\right) g^{mk}$ (die nur für ∇^g gelten kann !), dass

$$\Gamma_{ij}^k(x) = \frac{1}{x_n}(-\delta_{jk}\delta_{in} - \delta_{ki}\delta_{jn} + \delta_{ij}\delta_{kn})$$

in jedem $x \in \mathbb{H}^n$ erfüllt ist. (2)

b) Hiermit und mittels des Resultats aus Aufgabe 17 leite man für die Koeffizienten $R_{ijkl}(x) := \sum_{m=1}^n R_{ijk}^m(x) g_{ml}(x)$ des ,,Riemannschen Krümmungstensors" von $(\mathbb{H}^n, g)$ die Formel $R_{ijij}(x) = \frac{-1}{(x_n)^4}$, für alle Paare $i \neq j$ her, woraus man für die sogenannten *Schnittkrümmungen* $K_{ij}(x) := \frac{R_{ijij}}{g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2}(x)$ von $(\mathbb{H}^n, g)$ in x das erstaunliche Resultat $K_{ij} \equiv -1$ ableite. Insbesondere erhalten wir also, dass die durch $K_{\mathbb{H}} := K_{12} \equiv K_{21}$ definierte Gauss'sche Krümmung der ,,Poincaré-Halbebene" $(\mathbb{H}, g)$ den konstanten Wert -1 haben muss, obwohl $(\mathbb{H}, g)$ ja ,,eigentlich bloss eine Ebene" ist ! (3)

Abgabe: Am 02.02.10, bitte ! Nur noch einmal die Zähne zusammenbeissen ! Vielen Dank für das Interesse und die Aufmerksamkeit !