Universität Duisburg - Essen	WS 09/10
Fachbereich Mathematik	28.10.2009
Campus Duisburg	Dr. habil. R. Jakob

2. Übungsblatt zur Vorlesung
Differentialgeometrie II

Aufgabe 1:

a) Sei S eine n-dimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^{n+1}$ und $U \subset S$ eine offene zusammenhängende Teilmenge, welche die Nullstellenmenge zweier verschiedener Funktionen $f, \tilde{f} \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ für eine offene Teilmenge $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\Omega \supset U$ sei. Offenbar gilt i.a. für die aus f und $\tilde{f}$ gebildeten Einheits-Normalen-Felder: $N := \frac{\nabla f}{|\nabla f|} \not\equiv \tilde{N} := \frac{\nabla \tilde{f}}{|\nabla \tilde{f}|}$ auf Ω. Gilt aber vielleicht wenigstens entweder $N \equiv \tilde{N}$ oder $N \equiv -\tilde{N}$ auf U ? Falls ja, so folgere man hieraus, dass

$$DN(z) \mid_{T_zS} = D\tilde{N}(z) \mid_{T_zS} \qquad \forall\, z \in U, \tag{1}$$

also dass $DN(z)(v) = D\tilde{N}(z)(v)$ für jeden Tangentialvektor $v \in T_zS$, in jedem Punkt $z \in U$, korrekt ist. Was ergibt sich somit für die Weingarten-Abbildung $L(z) := -DN(z) \mid_{T_zS}$: $T_zS \longrightarrow T_zS$ und die Gauss'sche Krümmung $K_S(z) = \det(L(z))$ der Mannigfaltigkeit S ? Und wie sollte nach dieser Einsicht das Theorema Egregium (im Fall $n = 2$) korrekt interpretiert werden ? (3)
Hinweis: Man verwende für den Beweis von (1) eine C^1-Parametrisierung $\Psi : V \xrightarrow{\cong} U$ von U und beachte die Kettenregel und den maximalen Rang von $D\Psi(x)$!

b) Gilt auch „umgekehrt", dass zwei C^1-Funktionen $g, \tilde{g} \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$, welche $\langle \nabla g(z), v\rangle = \langle \nabla \tilde{g}(z), v\rangle$ für jeden Tangentialvektor $v \in T_zS$ in jedem Punkt $z \in U$ erfüllen, bereits bis auf eine reelle (additive) Konstante auf U übereinstimmen müssen ? (2)
Hinweis: Man lasse sich vom Zusammenhang von U inspirieren !

c)* Gilt die Aussage aus (b) sogar allgemeiner für eine Teilmenge $U \subset \Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$, die sich nur noch als Graph einer Lipschitz-stetigen Funktion $h \in C^{0,1}(V)$ über einem Teilgebiet V des $\mathbb{R}^n$ darstellen lässt ? (2)

Aufgabe 2:

Man beweise die Behauptung von Proposition 1.1.2, d.h.:
Seien $\{\eta_i^1\}_{i\in\mathbb{N}}$ und $\{\eta_j^2\}_{j\in\mathbb{N}}$ zwei beliebige Zerlegungen der Eins auf einer n-dim. Untermannigfaltigkeit S des $\mathbb{R}^{n+1}$ und erfülle $f : S \longrightarrow \mathbb{R}_+$ entweder $\sum_{i\in\mathbb{N}} \int_S f\eta_i^1\, dvol_S < \infty$ oder $\sum_{j\in\mathbb{N}} \int_S f\eta_j^2\, dvol_S < \infty$, so gilt bereits

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \int_S f\eta_i^1\, dvol_S = \sum_{j\in\mathbb{N}} \int_S f\eta_j^2\, dvol_S.$$

(5)

Hinweis: Man muss entweder eine $1 = \sum_{i \in \mathbb{N}} \eta_i^1$ oder eine $1 = \sum_{j \in \mathbb{N}} \eta_j^2$ in eine der beiden Reihen einfügen, die einzelnen Integrale $\int_S f \eta_i^1 \eta_j^2 \, dvol_S$ mittels Parametrisierungen auf eine fest gewählte offene Teilmenge U des $\mathbb{R}^n$ „herunterziehen" und dann mittels des Konvergenz-Satzes von B. Levi aus der Lebesgue-Theorie Integration und Summation vertauschen. Ist man dann schon fertig ? Braucht man danach auch noch Dirichlet's Umordnungssatz für absolut konvergente Reihen ?

Abgabe: Am 06.11.09, bitte !