Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

WS 09/10
06.11.2009
Dr. habil. R. Jakob

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Differentialgeometrie II

Aufgabe 6:

a) Sei S eine zwei-dimensionale Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ der Klasse C^7 mit konstanter Gausskrümmung K, $z_0 \in S$ fest und $\Phi : (0, r_0) \times [0, 2\pi) \xrightarrow{\cong} U \setminus \{z_0\}$ die ,,Exponentialparametrisierung" einer Normalumgebung $U \subset S$ mittels geodätischer Polarkoordinaten, also $\Phi(r, \theta) := \exp_{z_0}(r\,(X \cos(\theta) + Y \sin(\theta)))$. Hierbei sei also $\{X, Y\}$ eine beliebig gewählte Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ (bzgl. des euklidischen Skalarprodukts $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$). Desweiteren sei f diejenige Funktion auf U, welche auf den Bildern $\exp_{z_0}(\partial B_r(0))$ der Kreise $\partial B_r(0) \subset T_{z_0}S$ gerade den Wert r^2 annimmt, welche also $f \circ \Phi(r, \theta) = r^2$, $\forall\, \theta \in [0, 2\pi)$ und für jedes $r \in (0, r_0)$, erfüllt. Man berechne nun das ,,Flächenintegral" $\int_U f\, dvol_S$ in den drei zu unterscheidenden Fällen $K > 0$, $K = 0$ und $K < 0$. Welche Werte hat somit $\int_U f\, dvol_S$, falls als Radii r_0 für den Definitionsbereich von Φ exakt $r_0 = \frac{\pi}{\sqrt{K}}$ im Fall $K > 0$, $r_0 = \pi$ im Fall $K = 0$ und $r_0 = 1$ im Fall $K < 0$ gewählt werden können ? (5)
Hinweis: Aus Aufgabe 2 von Blatt 1 kennen wir ja $\det(g_{ij}^{\Phi})$ in den drei Fällen $K > 0$, $K = 0$ und $K < 0$ ganz genau und können zusammen mit $f \circ \Phi(r, \theta) = r^2$ fröhlich zu rechnen beginnen ! Im Fall $K < 0$ muss man den sinh einfach gemäss seiner Definition explizit ausschreiben !

b)* Sei nun ein Torus T als Bild der Parametrisierung $\Phi(\phi, \theta) := ((r \cos\phi + a) \sin\theta, (r \cos\phi + a) \cos\theta, r \sin\phi)$ für $\phi, \theta \in [0, 2\pi)$ gegeben, für feste Werte $a > r > 0$. Wir betrachten auf T diejenige Funktion, die $f \circ \Phi(\phi, \theta) = \phi$, für $\phi \in [0, \pi)$, und $f \circ \Phi(\phi, \theta) = 2\pi - \phi$, für $\phi \in [\pi, 2\pi)$, erfüllt. Nun berechne man das ,,Flächenintegral" $\int_T f\, dvol_T$! Warum reicht uns hierfür diese eine Parametrisierung Φ ? Streng genommen müssten wir ja Φ auf der offenen Menge $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$ als Parametrisierung einer offenen Teilmenge von T definieren !? (3)
Hinweis: Man beachte $a > r$ für einen vernünftigen Umgang mit $\sqrt{\det(g_{ij}^{\Phi})}$!

Aufgabe 7:

Sei nun $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ eine reguläre, geschlossene C^2-Kurve. Wir definieren zu α deren Winkelfunktion ϑ auf $[a, b]$ durch

$$\vartheta(t) := \vartheta_0 + \int_a^t \frac{1}{|\,\dot\alpha\,|^2} \Big\langle \begin{pmatrix} -\dot\alpha_2 \\ \dot\alpha_1 \end{pmatrix}, \ddot\alpha \Big\rangle\, d\mathcal{L}^1,$$

wobei $\vartheta_0 \in [0, 2\pi)$ durch die Forderung $\frac{\dot\alpha(a)}{|\dot\alpha(a)|} = (\cos(\vartheta_0), \sin(\vartheta_0))$ eindeutig bestimmt sei.

a) Man zeige, dass $\frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|} = (\cos(\vartheta(t)), \sin(\vartheta(t))) \; \forall\, t \in [a, b]$ gilt ! (4)
Hinweis: Man muss die Funktion $\theta(x, y)$ auf $\mathbb{R}^2$ (ohne eine adäquat gewählte Halbgerade) durch

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = (\cos(\theta(x, y)), \sin(\theta(x, y)))$$

implizit definieren und geschickt verwenden ! Was ist beispielsweise $\tan(\theta(x, y))$ bzw. $\cot(\theta(x, y))$, und wie lauten demnach die partiellen Ableitungen von unserem $\theta(x, y)$ nach x und y ? Man vergleiche diese partiellen Ableitungen dann mit der Ableitung $\dot{\vartheta}(t)$!

b) Man leite aus dem Teil (a) sofort ab, dass $n_\alpha := \frac{1}{2\pi}(\vartheta(b) - \vartheta(a))$ eine ganze Zahl sein muss ! Welche geometrische Interpretation hat wohl diese Zahl n_α ? Zählt sie vielleicht die Anzahl der Umläufe von α (um einen festen Punkt der Ebene) oder eher die Anzahl der Rotationen ihrer Tangente ? (1)

c)* Lässt sich die (orientierte) Krümmung κ_α von α irgendwie durch die Winkelfunktion ϑ ausdrücken ? In welchem Zusammenhang stehen diese beiden geometrischen Grössen von α und welche neue, anschauliche Interpretation erlaubt dies für die orientierte Krümmung κ_α regulärer Kurven in der Ebene ? (1)

Abgabe: Am 17.11.09, bitte !