Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

WS 09/10
16.11.2009
Dr. habil. R. Jakob

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Differentialgeometrie II

Aufgabe 8:

Wir betrachten wieder die Sphäre $\mathbb{S}^2$ zusammen mit ihren sphärischen Koordinaten $\Phi(\phi, \theta) := (\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, \sin\theta)$, für $\phi \in [0, 2\pi)$ und $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Man berechne mittels (der lokalen Version) des Satzes von Gauss-Bonnet die totale Gauss'sche Krümmung $\int_D K_{\mathbb{S}^2} dvol_{\mathbb{S}^2}$ über den folgenden Teilmengen D der $\mathbb{S}^2$:

a) D_{θ^*} bestehe aus denjenigen Punkten $z = \Phi(\phi, \theta)$, deren Höhengrad θ grösser als ein beliebiges, aber festes $\theta^* \in [0, \frac{\pi}{2})$ sei. D.h., D_{θ^*} sei eine sphärische Kappe ab der Höhe θ^*. (2)

b) $D_{\theta_1^*,\theta_2^*}$, $0 \leq \theta_1^* < \theta_2^* < \frac{\pi}{2}$, sei wieder eine ,,sphärische Kappe", deren Rand nun aber kein simpler Breitenkreis zu fixierter Höhe ist, sondern welcher die folgende stückweise glatte Parametrisierung besitze: $\alpha(t) := \Phi(t, \theta_1^*)$, für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\alpha(t) := \Phi(\frac{\pi}{2}, (t-\frac{\pi}{2})\frac{2}{\pi}(\theta_2^*-\theta_1^*)+\theta_1^*)$, für $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\alpha(t) := \Phi(t-\frac{\pi}{2}, \theta_2^*)$, für $t \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, $\alpha(t) := \Phi(\pi, (t-\frac{3\pi}{2})\frac{2}{\pi}(\theta_1^*-\theta_2^*)+\theta_2^*)$, für $t \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$, und dann weiter mit (bzgl. der z-Achse) symmetrischer Fortsetzung für Breitengrade $\phi \in [\pi, 2\pi)$. $\partial D_{\theta_1^*,\theta_2^*}$ ist also ein geschlossener Weg mit genau 8 Ecken, der auf dem Höhengrad θ_1^* ,,parallel zum Äquator" zu laufen beginnt, dann ,,senkrecht" zum Höhengrad θ_2^* hinaufsteigt, dann auf dem Höhengrad θ_2^* weiterfährt und dann wieder ,,senkrecht" auf die Höhe θ_1^* hinabsteigt, um anschliessend diesen ,,Fahrplan" noch einmal zu durchlaufen. (3)

Hinweis: Man muss die oben auftretenden Wege, bzw. Wegstücke erst auf deren Bogenlängen umparametrisieren und dann deren (zum Glück konstanten) geodätischen Krümmungen berechnen ! Und Vorsicht bei den Vorzeichen der Aussenwinkel in den auftretenden Ecken !

Aufgabe 9:

a) Wir betrachten wieder einen Torus T, welcher als Bild der Parametrisierung $\Phi(\phi, \theta) := ((r\cos\phi + a)\sin\theta, (r\cos\phi + a)\cos\theta, r\sin\phi)$ für $\phi, \theta \in [0, 2\pi)$ gegeben sei, für feste Werte $a > r > 0$. Auf T betrachten wir dasjenige ,,Viereck" D, welches von der folgenden Kurve berandet sei: $\alpha(t) := \Phi(t, 0)$, für $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\alpha(t) := \Phi(\frac{\pi}{2}, t - \frac{\pi}{2})$, für $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$, $\alpha(t) := \Phi(\frac{3\pi}{2} - t, \frac{\pi}{2})$, für $t \in [\pi, \frac{3\pi}{2}]$, und $\alpha(t) := \Phi(0, 2\pi - t)$, für $t \in [\frac{3\pi}{2}, 2\pi]$. Wie in Aufgabe 8 berechne man nun mittels (der lokalen Version) des Satzes von Gauss-Bonnet die totale Gauss'sche Krümmung $\int_D K_T dvol_T$! (3)

b) Mittels der Überlegungen aus Teil (a) und der Symmetrie von T berechne man die totale Gauss'sche Krümmung $\int_T K_T dvol_T$ des gesamten Torus ! Hängt das Ergebnis von den Werten $a > r > 0$ ab ? Hätte man a priori eine (Un-)Abhängigkeit des Wertes $\int_T K_T dvol_T$ von den Parametern $a > r > 0$ erwarten sollen ? (1)

c) Man lasse sich vom im Teil (a) betrachteten Viereck auf T dazu inspirieren, eine möglichst einfache ,,Pflasterung" der gesamten Oberfläche von T durch Vierecke zu erhalten, um anschliessend die Anzahl F der verwandten Vierecke, die Anzahl K aller auftretenden ,,Kanten" bzw. Kurvenbögen und die Anzahl E aller auftretenden Eckpunkte zu zählen. Welchen Wert hat dann $F - K + E$? Überrascht ? Man zähle hierbei zusammenfallende ,,Kanten" und Ecken (zwischen zwei sich berührenden Vierecken) einfach, und nicht etwa doppelt ! (1)

Abgabe: Erst am 01.12.09, bitte !