Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

WS 09/10
28.11.2009
Dr. habil. R. Jakob

5. Übungsblatt zur Vorlesung
Differentialgeometrie II

Aufgabe 10:

Wir betrachten wieder die Sphäre $\mathbb{S}^2$ zusammen mit ihren sphärischen Koordinaten $\Phi(\phi,\theta) := (\cos\phi\cos\theta, \sin\phi\cos\theta, \sin\theta)$, für $\phi \in [0,2\pi)$ und $\theta \in [-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, und diejenige Teilmenge D der oberen Hemisphäre, deren Rand aus den drei folgenden Zusammenhangskomponenten bestehe: Die erste sei der Äquator, die zweite sei ein sphärisches Viereck mit der folgenden Parametrisierung: $\alpha(t) := \Phi(t,\theta_1^*)$, für $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$ und ein $\theta_1^* \in (0,\frac{\pi}{2})$, $\alpha(t) := \Phi(\frac{\pi}{2},(t-\frac{\pi}{2})\frac{2}{\pi}(\theta_2^*-\theta_1^*)+\theta_1^*)$, für $t \in [\frac{\pi}{2},\pi]$ und ein $\theta_2^* \in (\theta_1^*,\frac{\pi}{2})$, $\alpha(t) := \Phi(\frac{3\pi}{2}-t,\theta_2^*)$, für $t \in [\pi,\frac{3\pi}{2}]$, $\alpha(t) := \Phi(0,(t-\frac{3\pi}{2})\frac{2}{\pi}(\theta_1^*-\theta_2^*)+\theta_2^*)$, für $t \in [\frac{3\pi}{2},2\pi]$, und die dritte sei das sphärische Viereck mit folgender Parametrisierung: $\beta(t) := \Phi(t+\pi,\theta_1^*)$, für $t \in [0,\frac{\pi}{2}]$, $\beta(t) := \Phi(\frac{3\pi}{2},(t-\frac{\pi}{2})\frac{2}{\pi}(\theta_2^*-\theta_1^*)+\theta_1^*)$, für $t \in [\frac{\pi}{2},\pi]$, $\beta(t) := \Phi(\frac{5\pi}{2}-t,\theta_2^*)$, für $t \in [\pi,\frac{3\pi}{2}]$, $\beta(t) := \Phi(\pi,(t-\frac{3\pi}{2})\frac{2}{\pi}(\theta_1^*-\theta_2^*)+\theta_2^*)$, für $t \in [\frac{3\pi}{2},2\pi]$.

a) Man berechne zunächst die Euler-Charakteristik von D mittels einer günstig gewählten Triangulierung von D und anschliessend die totale Gauss'sche Krümmung $\int_D K_{\mathbb{S}^2} dvol_{\mathbb{S}^2}$ mittels der globalen Version des Satzes von Gauss-Bonnet. (2)

b) Sicherheitshalber berechne man $\int_D K_{\mathbb{S}^2} dvol_{\mathbb{S}^2}$ auch noch mittels der lokalen Version des Satzes von Gauss-Bonnet (eben in Anwendung auf die beiden sphärischen Vierecke). Stimmt das Ergebnis mit demjenigen aus Teil (a) überein ? (2)

c) Welchen Wert erhalten wir somit im Limes für $\int_D K_{\mathbb{S}^2} dvol_{\mathbb{S}^2}$, falls wir beispielsweise θ_2^* gegen $\theta_1^* \in (0,\frac{\pi}{2})$ oder simultan θ_2^* gegen $\frac{\pi}{2}$ und θ_1^* gegen 0 streben lassen ? Machen die erhaltenen Werte für die beiden Limites Sinn, oder ist irgendwas „faul" ? (1)

Hinweis: Man kann natürlich die Kentnisse und Überlegungen aus Aufgabe 8 in (a) und (b) verwenden. Und wieder Vorsicht bei den Vorzeichen der Aussenwinkel in den auftretenden Ecken !

Aufgabe 11:

Sei $r \in C^2([-H,H],\mathbb{R}_+)$ eine Funktion auf dem abgeschlossenen Teilintervall $[-H,H]$ der z-Achse (im $\mathbb{R}^3$) mit positiven Werten. Wir betrachten die Rotationsfläche $\mathcal{R}$ im $\mathbb{R}^3$, welche bei Drehung des Graphen $\{(r(z),0,z) \mid z \in [-H,H]\}$ von r um die z-Achse entsteht, welche also durch die Einbettung $\Phi(z,\theta) := (r(z)\cos(\theta), r(z)\sin(\theta), z)$, für $z \in [-H,H]$ und $\theta \in [0,2\pi)$, parametrisiert werde.

a) Man berechne die Koeffizienten $\mathcal{E}, \mathcal{F}, \mathcal{G}$ der ersten und die Koeffizienten $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$ der zweiten Fundamentalform, sowie das nach Aussen weisende (!) Normalenfeld $N \circ \Phi$ der entstandenen Rotationsfläche $\mathcal{R}$, und damit dann die Gauss'sche Krümmung $K_{\mathcal{R}} \circ \Phi$ von $\mathcal{R}$ in jedem Punkt (z, θ) des Parameterbereichs $[-H, H] \times [0, 2\pi)$. Anschliessend berechne man hiermit die totale Gauss'sche Krümmung $\int_{\mathcal{R}} K_{\mathcal{R}} dvol_{\mathcal{R}}$ von $\mathcal{R}$. (2)
Hinweis: Man werfe zunächst einmal einen neugierigen Blick auf Aufgabe 11 von Diffgeo I ! Und falls man bei der finalen Auswertung des zu berechnenden Integrals $\int_{\mathcal{R}} K_{\mathcal{R}} dvol_{\mathcal{R}}$ auf Granit beissen sollte, so versuche man erst einmal den in Teil (b) empfohlenen Lösungsweg zu verfolgen. Auf diesem sollte sich spätestens alles aufklären !

b) Nun ermittele man $\int_{\mathcal{R}} K_{\mathcal{R}} dvol_{\mathcal{R}}$ mittels der globalen Version des Satzes von Gauss-Bonnet. Man darf hierfür verwenden, dass die Euler-Charakteristik eine sogenannte ,,Homöomorphie-Invariante" ist, sodass also insbesondere $\chi(\mathcal{R}) = \chi(\mathbb{S}^1 \times [-H, H])$ gilt, was ganz leicht zu berechnen ist. Anschliessend vergleiche man das hübsche Ergebnis für $\int_{\mathcal{R}} K_{\mathcal{R}} dvol_{\mathcal{R}}$ mit demjenigen (wahrscheinlich noch unvollständigen) aus Teil (a) ! Wie lautet demnach eine Stammfunktion der Funktion $g \mapsto \frac{1}{(1+g^2)^{3/2}}$? Und wer hätte ahnen können, dass man den Satz von Gauss-Bonnet zur Ermittlung von Stammfunktionen gebrauchen kann ? Welchen Wert erhalten wir somit für $\int_{\mathcal{R}} K_{\mathcal{R}} dvol_{\mathcal{R}}$ im Spezialfall $\dot{r}(H) = \dot{r}(-H)$? (3)
Hinweis: Man beachte bei den Parametrisierungen (auf Bogenlänge) der beiden Randkurven von $\mathcal{R}$ deren Orientierungen bezüglich $\mathcal{R}$ (orientiert mittels des nach Aussen weisenden Normalenfeldes !), um Vorzeichenfehler bei deren Verwendung im Satz von Gauss-Bonnet zu vermeiden !

Abgabe: Am 08.12.09, bitte !