Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

WS 09/10
06.12.2009
Dr. habil. R. Jakob

6. Übungsblatt zur Vorlesung
Differentialgeometrie II

Aufgabe 12:

Seien S_1 und S_2 zwei (nicht notwendig orientierbare) C^2-Hyperflächen des $\mathbb{R}^3$ und $R_j \subset S_j$, $j = 1, 2$, kompakte, m_j-fach zusammenhängende Teilmengen mit stückweise glatten Rändern (welche auch leer sein dürfen). Weiterhin sei $D \subset \mathbb{R}^2$ entweder eine endliche, disjunkte Vereinigung – also eine endliche direkte Summe $\coprod$ – aus abgeschlossenen Einheits-Intervallen oder aus Einheits-Kreisen oder aus abgeschlossenen Einheits-Kreisscheiben. Man beweise nun:

a) Falls R_1 und R_2 zueinander diffeomorph sind, so gilt $\chi(R_1) = \chi(R_2)$. (1)

b) Für die Euler-Charakteristik eines Amalgams $R_1 \cup_{(i_1,i_2)} R_2$ über D gilt im Falle einbettender Verklebungsabbildungen $i_j : D \xrightarrow{\cong} i_j(D) \subset R_j$ die einprägsame Formel:

$$\chi(R_1 \cup_{(i_1,i_2)} R_2) = \chi(R_1) + \chi(R_2) - \chi(D).$$

(2)

c)* Für die Euler-Charakteristik einer g-fachen verbundenen Summe $B_g := T_1 \sharp \ldots \sharp T_g$ aus g identischen Tori (jeweils miteinander verklebt über $\mathbb{S}^1$), also einer Brezel mit g ,,Henkeln", gilt die Formel $\chi(B_g) = 2 - 2g$. (Hinweis: Per Induktion und Teil (b) !) (1)

Aufgabe 13:

Man definiert den n-dimensionalen ,,reellen projektiven Raum" $\mathbb{RP}^n$, $n \in \mathbb{N}$, als die Menge aller Geraden (ohne die Null) durch den Ursprung im $\mathbb{R}^{n+1}$. Der $\mathbb{RP}^n$ ist also der Quotientenraum $(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, wobei zwei Punkte x_1 und x_2 des $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ zueinander äquivalent seien, falls es eine reelle Zahl $\lambda \neq 0$ mit $x_1 = \lambda x_2$ gibt, und seine Punkte sind die entsprechenden Äquivalenzklassen $[x] = [x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}]$. Wir statten den $\mathbb{RP}^n$ mit der sogenannten Quotienten-Topologie aus, d.h. eine Teilmenge des $\mathbb{RP}^n$ sei per Definition offen, falls ihr Urbild unter der kanonischen Projektion $p : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{RP}^n$, definiert durch $p(x) := [x]$, eine offene Menge in $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ ist.

a) Man finde eine Überdeckung des $\mathbb{RP}^n$ durch $n+1$ (in $\mathbb{RP}^n$) offene Mengen $U_1, \ldots, U_{n+1}$, welche jeweils zum $\mathbb{R}^n$ homöomorph sind. Ist der $\mathbb{RP}^n$ demnach eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit ohne Rand ? (2)

b) Man zeige nun auch noch deren Kompaktheit und Zusammenhang, indem man eine (ziemlich auf der Hand liegende) stetige Surjektion $s : \mathbb{S}^n \longrightarrow \mathbb{RP}^n$ angibt ! Bei korrekter Wahl dieser Surjektion sollte diese ausserdem $s^{-1}([x]) = \{\frac{x}{|x|}, -\frac{x}{|x|}\}, \forall [x] \in \mathbb{RP}^n$, erfüllen ! Liefert dieses s somit einen Homöomorphismus des Quotientenraums $\mathbb{S}^n/\{x \sim -x\}$ auf den $\mathbb{RP}^n$? (2)

c) Man beweise nun, dass das Amalgam $M \cup_{(i_1,i_2)} K$ des Möbiusbandes M und der abgeschlossenen Einheits-Kreisscheibe K entlang deren (zur $\mathbb{S}^1$ homöomorphen) Ränder, mit $i_1 : \mathbb{S}^1 = \partial K \hookrightarrow K$ und einer zweiten, anzugebenden Verklebungsabbildung $i_2 : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\cong} \partial M \subset M$, zum $\mathbb{RP}^2$ homöomorph ist. Hierbei sei ,,das Möbiusband" M der Quotientenraum $[0,1]^2/\sim$ mit der Äquivalenzrelation $(s,0) \sim ((1-s),1)$, $s \in [0,1]$, also die Verklebung eines Quadrates $[0,1]^2$ mit sich selbst entlang zweier seiner gegenüberliegenden Kanten, in entgegengesetzter Orientierung. (3)

d)* Kann man $M \cup_{(i_1,i_2)} K$ ohne Selbstdurchdringungen (!) im $\mathbb{R}^3$ realisieren (also mittels Papier, Schere und Klebstoff vergnügt herstellen) und demnach den $\mathbb{RP}^2$ in den $\mathbb{R}^3$ einbetten ? Und angenommen, wir hätten in Teil (c) sogar eine Diffeomorphie zwischen $M \cup_{(i_1,i_2)} K$ und dem $\mathbb{RP}^2$ gezeigt. Könnten wir dann die Euler-Charakteristik des $\mathbb{RP}^2$ berechnen ? (1)

Hinweis: Man betrachte für den Beweis der Homöomorphie in (c) anstatt der Mengen M und K zunächst die Quotienten $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ der beiden Teilmengen $A := \{x \in \mathbb{S}^2 \mid x_2 \leq 0, | x_3 | \leq 1/2\}$ und $B := \{x \in \mathbb{S}^2 \mid x_3 \geq 1/2\}$ in $\mathbb{S}^2/\{x \sim -x\}$ und beweise, dass das s aus Teil (b) deren Vereinigung homöomorph auf den $\mathbb{RP}^2$ abbildet ! Was haben nun die Mengen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ mit dem Möbiusband und der Einheits-Kreisscheibe zutun ? Und könnte man vielleicht die universelle ,,Push-Out"-Eigenschaft des Amalgams verwenden, um eine Homöomorphie $M \cup_{(i_1,i_2)} K \cong \tilde{A} \cup \tilde{B}$ herzuleiten ?

Abgabe: Erst am 22.12.09, bitte ! Die Übung am 18.12.09 fällt aus. Die Vorlesungen finden alle regulär statt.