Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

WS 09/10
19.12.2009
Dr. habil. R. Jakob

7. Übungsblatt zur Vorlesung
Differentialgeometrie II

Aufgabe 14:

a) Man beweise (mittels der Techniken und Resultate aus Aufgabe 13), dass das Amalgam $M \cup_{(i_1,i_1)} M$ zweier Möbiusbänder entlang ihrer Ränder, also mittels zweier identischer, anzugebender Verklebungsabbildungen $i_1 : \mathbb{S}^1 \xrightarrow{\cong} \partial M \subset M$, welche den Rand des (in den $\mathbb{R}^3$ eingebetteten) Möbiusbandes M parametrisieren, zur verbundenen Summe $\mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2$ zweier projektiver Ebenen homöomorph ist. (3)

b) Angenommen, wir hätten in Teil (a) sogar eine Diffeomorphie zwischen $M \cup_{(i_1,i_1)} M$ und $\mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2$ gezeigt. Könnten wir dann die Euler-Charakteristik von $\mathbb{RP}^2 \sharp \mathbb{RP}^2$ und danach sogar (per Induktion) einer verbundenen Summe $N_g := \mathbb{RP}^2 \sharp \ldots \sharp \mathbb{RP}^2$ aus $g+1$ Kopien des $\mathbb{RP}^2$, für jedes $g \in \mathbb{N}$, berechnen ? (2)

Aufgabe 15:

Man betrachte die Abbildung Θ, die einer beliebig gewählten Äquivalenzklasse $[\gamma]$ differenzierbarer Kurven $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \longrightarrow M$ durch einen Punkt $p \in M$, also mit $\gamma(0) = p$, (wie in der ersten Definition des ,,Tangentialvektors" aus der Vorlesung) denjenigen Tangentialvektor $X \in T_pM$ zuordnet, der vermöge der Vorschrift $X(f) := \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \mid_{t=0}$ auf differenzierbaren Funktionen (auf Umgebungen von p) operiert.

a) Man zeige, dass Θ eine wohldefinierte Abbildung ist. D.h. man kläre, ob $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma_1) \mid_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma_2) \mid_{t=0}$ gilt, falls γ_1 zu γ_2 äquivalent ist. Und wieso liefert überhaupt die obige Vorschrift $X(f) := \frac{d}{dt}(f \circ \gamma) \mid_{t=0}$ ein Element aus T_pM ? (2)

b) Wieso ist die Abbildung Θ injektiv und surjektiv ? (3)

Hinweis: Man beachte in (a) und (b), dass mit Hilfe einer Karte (Ω, Φ) nach der Kettenregel $\frac{d}{dt}(f \circ \gamma) = \langle \nabla(f \circ \Phi^{-1})(\Phi(\gamma)), \frac{d}{dt}(\Phi \circ \gamma) \rangle$ auf $(-\epsilon, \epsilon)$ gilt. Ausserdem könnte sich der Weg $\gamma(t) := \Phi^{-1}(t(X^1, \ldots, X^n))$ in Teil (b) als nützlich erweisen, wenn $X^i := X(\Phi^i)$ die Koeffizienten eines vorgegebenen $X \in T_pM$ bzgl. (Ω, Φ) bezeichnen.

Abgabe: Am 05.01.10, bitte ! Ein gesegnetes Fest und eine feiste Weihnachts-Gans !