Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

WS 09/10
09.01.2010
Dr. habil. R. Jakob

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Differentialgeometrie II

Aufgabe 16:

Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit.

a) Man beweise mittels der Produktregel für Tangentialvektoren, dass

$$[f\,X, h\,Y] = f\,h\,[X,Y] + f\,X(h)\,Y - h\,Y(f)\,X \qquad auf \quad M,$$

für beliebige Vektorfelder X, Y und diff.bare Funktionen f, h auf M gilt. (Man beachte, dass hierbei also $X(h)$ und $Y(f)$ wieder diff.bare Funktionen mit beispielsweise $X(h)(p) := X_p(h)$, $\forall\, p \in M$, sind !) (2)

b) Man beweise (durch sture Anwendung der Definition der Lie-Klammer) die „Jacobi-Identität":

$$[X,[Y,Z]] + [Z,[X,Y]] + [Y,[Z,X]] \equiv 0 \qquad auf \quad M,$$

für beliebige C^∞-Vektorfelder X, Y, Z auf M. (1)

c) Wir definierten in der Vorlesung die Wirkung der Ableitung $T\Psi$ einer diff.baren Abbildungen $\Psi : M \longrightarrow W$ in einem Punkt $p \in M$ auf einen Tangentialvektor $X \in T_pM$ durch

$$(T\Psi)_p(X) : f \longmapsto X(f \circ \Psi),$$

für jedes f auf einer Umgebung von $\Psi(p)$. Nun wende man diese Definition auf eine diff.bare Abbildung $\Psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ und einen Standard-Basisvektor $\frac{\partial}{\partial x^j}\,|_x \equiv e_j$ von $T_x\mathbb{R}^n \equiv \mathbb{R}^n$ an. Wieso erhalten wir ausgerechnet

$$(T\Psi)_x\Big(\frac{\partial}{\partial x^j}\,|_x\Big) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial \Psi^i}{\partial x^j}(x)\,\frac{\partial}{\partial y^i}\,|_{\Psi(x)},$$

wenn $\{\frac{\partial}{\partial y^i}\,|_{\Psi(x)}\} \equiv \{\hat{e}_i\}$ die Standard-Basis von $T_{\Psi(x)}\mathbb{R}^m \equiv \mathbb{R}^m$ bezeichnet ? Wieso sollte man dieses Resultat im Hinblick auf die klassische Differential-Rechnung der Analysis II erwarten ? Was sind denn die Komponenten von $D\Psi(x) \cdot e_j$ bei dessen Darstellung mittels der Standard-Basis $\{\hat{e}_i\}$ des $\mathbb{R}^m$? (3)

Aufgabe 17:

Man beweise Proposition 2.3.1 aus der Vorlesung:
Sind M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, (Ω, Φ) eine Karte von M und ∇ ein Zusammenhang

auf Ω mit Christoffel-Symbolen $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(\Omega)$, so gilt für die Koeffizienten $[R(X,Y)Z]^k$ des Vektorfeldes $R(X,Y)Z \in \Gamma_\infty(M)$ bezüglich des lokalen Rahmens $\{\frac{\partial}{\partial x^k}\}_{k=1,\dots,n}$ von $T\Omega$ (bzgl. Φ) die Formel (Vorsicht: Summationskonvention !):

$$[R(X,Y)Z]^k = X^i Y^j Z^l \Big(\frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{im}^k \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{jm}^k \Gamma_{il}^m \Big),$$

für beliebige Vektorfelder $X, Y, Z \in \Gamma_\infty(M)$, mit den Koeffizienten X^i, Y^i, Z^i bzgl. $\{\frac{\partial}{\partial x^i}\}_{i=1,\dots,n}$. Hieraus folgere man für $R_{lij}^k := \Big(R\big(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\big)\frac{\partial}{\partial x^l}\Big)^k$ die bereits aus der Hyperflächen-Theorie ,,vertraut erscheinende Formel":

$$R_{lij}^k = \frac{\partial \Gamma_{jl}^k}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{il}^k}{\partial x^j} + \Gamma_{im}^k \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{jm}^k \Gamma_{il}^m. \tag{4}$$

Abgabe: Am 19.01.10, bitte ! Und ein ,,Frohes Neues", allerseits !