Universität Duisburg - Essen
Fachbereich Mathematik
Campus Duisburg

WS 09/10
16.01.2010
Dr. habil. R. Jakob

9. Übungsblatt zur Vorlesung
Differentialgeometrie II

Aufgabe 18:

Sei M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, (Ω, Φ) eine Karte von M, ∇ ein Zusammenhang auf Ω mit Christoffel-Symbolen $\Gamma_{ij}^k \in C^\infty(\Omega)$ und $\{\frac{\partial}{\partial x^k}\}_{k=1,\dots,n}$ der lokale Rahmen von $T\Omega$ (bzgl. Φ). Wir nennen eine diff.bare Kurve $\gamma : [a,b] \longrightarrow \Omega$ eine *Geodäte* in Ω, falls ihr Tangentenvektorfeld $(T\gamma)_t\Big(\frac{d}{dt}\Big)$ entlang γ ,,parallel" ist, d.h. falls $\nabla_{(T\gamma)_t\left(\frac{d}{dt}\right)}(T\gamma)_t\left(\frac{d}{dt}\right) \equiv 0$ auf $[a,b]$ gilt.

a) Welches System von n Differentialgleichungen 2. Ordnung (in deren Koeffizienten die Γ_{ij}^k aufzutauchen haben) müssen die Komponenten $\Phi^i(\gamma)$, $i = 1\dots,n$, in $t \in [a,b]$ lösen, damit γ eine Geodäte ist ? (3)

b) Angenommen, wir geben einen Startpunkt $\gamma(a) = p \in \Omega$ und einen Start-Richtungsvektor $(T\gamma)_a\Big(\frac{d}{dt}\Big) = X \in T_pM$ vor. Existiert dann wie in der klassischen Hyperflächen-Theorie auch eine Geodäte γ mit diesen beiden Anfangswerten ? Und ist solch eine Geodäte wiederum durch die Vorgabe von p und X eindeutig bestimmt ? Oder sollten wir hier doch vorsichtiger sein ? (1)

c) Statten wir nun den $\mathbb{R}^2$ mit dem (zur trivialen Karte $(\mathbb{R}^2, Id)$ gehörenden) konstanten, globalen Rahmen $(1,0),(0,1)$ und mit demjenigen Zusammenhang aus, dessen Christoffel-Symbole explizit durch $\Gamma_{11}^1 \equiv 5$, $\Gamma_{22}^2 \equiv \pi$ und $\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 \equiv 0$ gegeben seien. Wie lautet somit das in Teil (a) aufgestellte System von Differentialgleichungen 2. Ordnung für die beiden Komponenten (γ^1, γ^2) einer Geodäten $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$? Zweitens gebe man diejenige Geodäte γ explizit an, welche die Startwerte $\gamma(0) = (0,0)$ und $\dot\gamma(0) = (1,1)$ besitzt, und vergleiche deren Verlauf mit demjenigen der Geodäten mit denselben Startwerten, jedoch zum ,,völlig flachen" Zusammenhang mit allen $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$ auf $\mathbb{R}^2$! Man skizziere deren Abweichung ! (3)
Hinweis: Man verwende (in hier noch ziemlich simpler Form) den ,,Bernoullischen Kunstgriff", zur Lösung einer Differentialgleichung der Form $\dot x(t) = a(t)x(t)+b(t)(x(t))^m$, $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, die Funktion $y(t) := (x(t))^{1-m}$ zu betrachten. Welche Differentialgleichung erfüllt nämlich dieses $y(t)$, und wie lassen sich die Lösungen y dieser neuen Gleichung (insbesondere in unserer einfachen Anwendung) dann explizit aus $a(t)$ und $b(t)$ gewinnen ?

Aufgabe 19:

Seien M eine C^∞-Mannigfaltigkeit, (Ω, Φ) eine Karte von M, ∇ ein Zusammenhang auf Ω ohne Torsion (!) und $\{\frac{\partial}{\partial x^k}\}_{k=1,\dots,n}$ der lokale Rahmen von $T\Omega$ (bzgl. Φ). Man beweise für drei beliebige Basis-Vektorfelder $X, Y, Z \in \{\frac{\partial}{\partial x^k}\}_{k=1,\dots,n}$ die sogenannte 1. Bianchi-Identität

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y \equiv 0 \qquad \textit{auf} \quad \Omega.$$

Wie lässt sich diese Formel also mittels der Koeffizienten $R^k_{lij} := \left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^l}\right)^k$ des „Krümmungs-Tensors" R formulieren ? (Man beachte die Voraussetzung $T^\nabla \equiv 0$!) (3)

Abgabe: Am 26.01.10, bitte !