Nichtlineare Funktionalanalysis

Reiner Schätzle
Sommersemester 2011
Universität Tübingen

Inhaltsverzeichnis

Teil I

Analysis in Banachräumen

1 Banachräume

Folgende Definition ist aus der linearen Funktionalanalysis bekannt.

Definition 1.1 X *sei ein reeller Vektorraum. Eine Abbildung*

$$\| \, . \, \| : X \to [0, \infty[$$

heißt Norm auf X *, falls*

(i) $\| x \| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(ii) $\| \lambda x \| = |\lambda| \, \| x \|$ *für* $x \in X, \lambda \in \mathbb{R}$.

(iii) $\| x + y \| \leq \| x \| + \| y \|$ *für* $x, y \in X$.

Wir nennen $(X, \| \, \|)$ *oder kurz* X *einen normierten Vektorraum.*

Eine Norm erzeugt eine Metrik durch

$$d(x, y) := \| x - y \| \, .$$

Ist X *mit dieser Metrik vollständig, d.h. jede Cauchyfolge ist konvergent, so heißt* $(X, \| \, \|)$ *ein Banachraum.*

Ein inneres Produkt auf X

$$\langle ., . \rangle : X \times X \to \mathbb{R},$$

d.h. $\langle ., . \rangle$ *ist eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf* X *, erzeugt durch*

$$\| x \| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

eine Norm auf X .

Ist die von $\| \, \|$ *erzeugte Metrik vollständig, so heißt* $(X, \langle ., . \rangle)$ *ein Hilbertraum.*

$\square$

Der Raum aller stetigen, linearen Abbildungen $L(X, Y)$ zwischen zwei Banachräumen X, Y ist mit der Norm

$$\| \Lambda \| := \sup_{\|x\| \leq 1} \| \Lambda x \|$$

wieder ein Banachraum. Der Dualraum $X^* := L(X, \mathbb{R})$ ist der Raum der stetigen linearen Funktionale auf X .

Beispiele:

(i) L^p-Räume

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, d.h. $\mathcal{A}$ ist eine $\sigma-$Algebra auf Ω und μ ein $\sigma-$additvies Maß auf $\mathcal{A}$. Dann ist für $1 \leq p \leq \infty$ der Raum $L^p(\mu) = L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Banachraum.

Für $p = 2$ ist dies ein Hilbertraum.

(ii) Hölder-Räume

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer, $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist die Menge der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen mit beschränkten Ableitungen

$$C_b^k(\Omega) := \{u : \Omega \to \mathbb{R} \mid D^\gamma u \text{ existiert und ist stetig und beschränkt für } |\gamma| \leq k \}$$

ein Banachraum mit der Norm

$$\| u \|_{C_b^k(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} \| D^\gamma u \|_{L^\infty(\Omega)} .$$

Für $0 < \alpha \leq 1$, $u : \Omega \to \mathbb{R}$ definieren wir

$$h\ddot{o}l_{\Omega,\alpha} u := \sup_{x \neq y \in \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Der Raum

$$C^{k,\alpha}(\Omega) := \{u \in C_b^k(\Omega) \mid h\ddot{o}l_{\Omega,\alpha}(D^\gamma u) < \infty \text{ für } |\gamma| \leq k \}$$

ist ein Banachraum mit der Norm

$$\| u \|_{C^{k,\alpha}(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} (\| D^\gamma u \|_{L^\infty(\Omega)} + h\ddot{o}l_{\Omega,\alpha} D^\gamma u).$$

Wir schreiben für $\Omega \subseteq A \subseteq \overline{\Omega}$

$$C_{loc}^{k,\alpha}(A) := \{u \in C^k(\Omega) \mid \forall x \in A : \exists \delta > 0 : u \in C^{k,\alpha}(\Omega \cap B_\delta(x)) \}.$$

Wir nennen $C^{k,\alpha}(\Omega)$ die Hölder-Räume.

(iii) Sobolev-Räume

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und nichtleer, $k \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < \infty$. Wir betrachten den Vektorraum $C_0^\infty(\Omega)$ der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger mit der Norm

$$\| u \|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\gamma| \leq k} \| D^\gamma u \|_{L^p(\Omega)} .$$

Dies ist eine normierter Raum, aber kein Banachraum. Durch Vervollständigung erhalten wir einen Banachraum

$$W_0^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \exists u_i \in C_0^\infty(\Omega) : \lim_{i,j \to \infty} \| u_i - u_j \|_{W^{k,p}(\Omega)} = 0, \quad u_i \to u \text{ in } L^p(\Omega) \}.$$

Für $u \in W_0^{k,p}(\Omega)$ sind schwache Ableitungen $D^\gamma u \in L^p(\Omega)$ bis zur Ordnung $|\gamma| \le k$ definiert. Dazu sei $u_i \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $u_i \to u$ in $L^p(\Omega)$ und $\| u_i - u_j \|_{W^{k,p}(\Omega)} \to 0$. Dann konvergiert

$$D^\gamma u_i \to u^\gamma \quad \text{ in } L^p(\Omega) \text{ für } |\gamma| \le k,$$

und es gilt für $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int u^\gamma \varphi \leftarrow \int D^\gamma u_i \varphi = (-1)^{|\gamma|} \int u_i D^\gamma \varphi \to (-1)^{|\gamma|} \int u D^\gamma \varphi. \tag{1.1}$$

Damit ist u^γ eindeutig durch u bestimmt, und wir schreiben

$$D^\gamma u = u^\gamma.$$

Für $k \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le \infty$ verwenden wir (1.1) als Definition des folgenden Banachraumes

$$\begin{aligned} W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) \mid \quad & \text{Für } |\gamma| \le k \text{ existiert } u^\gamma \in L^p(\Omega) \text{ mit} \\ & \textstyle\int u^\gamma \varphi = (-1)^{|\gamma|} \int u D^\gamma \varphi \text{ für } \varphi \in C_0^\infty(\Omega)\ \}. \end{aligned}$$

Für $u \in L^p(\Omega)$ ist u^γ eindeutig bestimmt und heißt schwache Ableitung von u. Wir schreiben

$$D^\gamma u = u^\gamma.$$

$W_0^{k,p}(\Omega)$ ist ein Unterraum von $W^{k,p}(\Omega)$.

Für $p = 2$ sind $W_0^{k,p}(\Omega)$ und $W^{k,p}(\Omega)$ Hilberträume.

Wir nennen $W_0^{k,p}(\Omega)$ und $W^{k,p}(\Omega)$ Sobolev-Räume.

$\square$

2 Stetigkeit und Differentiation

Da auf einem Banachraum eine Metrik gegeben ist, ergibt sich die Definition von Stetigkeit sofort.

Definition 2.1 X, Y *seien Banachräume,* $\emptyset \neq M \subseteq X$ *und* $f : M \to Y$. f *heißt stetig, falls*

$$x_i \to x_0 \in M, \ x_i \in M \Longrightarrow f(x_i) \to f(x_0).$$

f *heißt gleichmäßig stetig, falls* $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 :$

$$\| x - y \| < \delta, \ x, y \in M \Longrightarrow \| f(x) - f(y) \| < \varepsilon.$$

f *heißt lokal beschränkt, falls* $\forall x \in M : \exists \varepsilon > 0 :$

$$f(B_\varepsilon(x)) \quad \textit{ist beschränkt in } Y.$$

f *heißt beschränkt, falls* f *beschränkte Mengen von* M *in beschränkte Mengen von* Y *abbildet.*

□

Stetigkeit impliziert lokale Beschränktheit, aber im allgemeinen nicht Beschränktheit.

Beispiel:

Es sei $X = l^2(\mathbb{N}) := \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid \sum_{i=1}^\infty |x_i|^2 < \infty \}$ und $e_i := (\delta_{ij})_{j\in\mathbb{N}} \in X$.

Wir setzen

$$\varphi_i(x) := \max(\frac{1}{4} - \| x - e_i \|, 0)$$

und

$$\varphi := \sum_{i=1}^\infty i \cdot \varphi_i$$

Da $[\varphi_i \neq 0] = B_{1/4}(e_i)$, ist diese Summe lokal endlich, und φ ist stetig.

Es gilt aber $e_i \in \overline{B_1(0)}$ und

$$\varphi(e_i) = \frac{i}{4} \to \infty,$$

also ist $\varphi(\overline{B_1(0)}) \subseteq \mathbb{R}$ unbeschränkt.

□

Andererseits gilt folgende Aussage.

Proposition:

X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq M \subseteq X$ beschränkt und konvex, und $f : M \to Y$ sei gleichmäßig stetig.

Dann ist

$$f(M) \text{ beschränkt.}$$

Beweis:
Es sei $x_0 \in M$ und $d = diam(M)$. Es existiert $\delta > 0$, so daß

$$\| x - y \| < \delta,\ x, y \in M \Longrightarrow \| f(x) - f(y) \| < 1.$$

Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{d}{N} < \delta.$$

Für $x \in M$ setzen wir

$$x_i := x_0 + \frac{i}{N}(x - x_0) \quad i = 0, \ldots, N.$$

Dann gilt $\| x_i - x_{i-1} \| < \delta$ also

$$\| f(x) \| \leq \| f(x_0) \| + \sum_{i=1}^{N} \| f(x_i) - f(x_{i-1}) \| \leq \| f(x_0) \| + N,$$

und $f(M)$ ist beschränkt.

//

Die Stetigkeit in Definition 2.1 bezieht sich auf die Normtopologien von X und Y . Mit der schwachen Konvergenz ergibt sich folgendes Kriterium für Beschränktheit.

Proposition:
X, Y seien Banachräume, X sei reflexiv, $\emptyset \neq M \subseteq X$ sei beschränkt und schwach folgenabgeschlossen, und $f : M \to Y$ sei schwach folgenstetig, d.h.

$$x_i \to x_0 \text{ schwach in } X,\ x_i, x_0 \in M \Longrightarrow f(x_i) \to f(x_0) \text{ schwach in } Y.$$

Dann ist

$$f(M) \text{ beschränkt.}$$

Beweis:
Falls nicht, so existiert $x_i \in M$ mit

$$\| f(x_i) \| \to \infty.$$

Da M beschränkt ist und X reflexiv ist, können wir für eine Teilfolge

$$x_i \to x_0 \quad \text{schwach konvergent in } X$$

annehmen, siehe [A] Satz 6.9. Da M schwach folgenabgeschlossen ist, folgt $x_0 \in M$ und

$$f(x_i) \to f(x_0) \quad \text{schwach konvergent in } Y.$$

Dies widerspricht $\| f(x_i) \| \to \infty$.

//

Beispiel 2.1
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen. Eine Funktion

$$A : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

heißt Caratheodoryfunktion, falls

$$(x \mapsto A(x, z, w)) \quad \text{lebesguemeßbar für festes } (z, w) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \text{ ist}$$

und

$$((z, w) \mapsto A(x, z, w)) \quad \text{stetig für festes } x \in \Omega \text{ ist.}$$

Insbesondere folgt, daß A lebesguemeßbar ist.

Für gegebene $1 \leq p, q < \infty$ gelte die Wachstumsbedingung

$$|A(x, z, w)| \leq C(\varphi(x) + |z|^{p/q} + |w|^{p/q}). \tag{2.1}$$

mit $\varphi \in L^q(\Omega)$.

Dann ist die Abbildung $f : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ mit

$$f(u)(x) := A(x, u(x), \nabla u(x))$$

stetig.

Beweis:
Es sei $u_j \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Für eine Teilfolge gilt $u_j \to u, \ \nabla u_j \to \nabla u \ \mathcal{L}^n-$fast überall auf Ω , und somit

$$A(., u_j, \nabla u_j) \to A(., u, \nabla u) \quad \mathcal{L}^n - \text{fast überall auf } \Omega.$$

Da $u_j \to u, \ \nabla u_j \to \nabla u$ in $L^p(\Omega)$ folgt mit dem Konvergenzsatz von Vitali, daß

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall E \subseteq \Omega : \quad \mathcal{L}^n(E) < \delta \Longrightarrow \int_E (\varphi^q + |u_j|^p + |\nabla u_j|^p) \leq \varepsilon.$$

Aus der Wachstumsbedingung (2.1) an A folgt

$$\int_E |A(., u_j, \nabla u_j)|^q \leq C\varepsilon,$$

und wieder mit dem Konvergenzsatz von Vitali

$$A(., u_j, \nabla u_j) \to A(., u, \nabla u) \quad \text{in } L^q(\Omega).$$

Also ist f stetig.

///

Beispiel 2.2 (Quasilineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform I)

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, $A_i, B : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$ seien Caratheodoryfunktionen, die die Wachstumsbedingung (2.1) für $1 < p, q < \infty$, $q = \frac{p}{p-1}$ und

$$(A(x, z, w_2) - A(x, z, w_1))(w_2 - w_1) \geq c_0 |w_2 - w_1|^p \tag{2.2}$$

für $(x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}$, $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ und ein $c_0 > 0$ erfüllen.

Wir betrachten das elliptische Randwertporblem

$$\begin{gathered} -\partial_i(A_i(., u, \nabla u)) + B(., u, \nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{gathered} \tag{2.3}$$

$u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ heißt schwache Lösung von (2.3), falls

$$\int\limits_\Omega A_i(., u, \nabla u)\partial_i v + B(., u, \nabla u)v = 0 \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,p}(\Omega),$$

wobei über $i = 1, \dots, n$ summiert wird.

Wir definieren $f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)^*$ durch

$$f(u).v := \int\limits_\Omega A_i(., u, \nabla u)\partial_i v + B(., u, \nabla u)v.$$

Nach Beispiel 2.1 ist f stetig, und Lösungen von (2.3) entsprechen den Nullstellen von f.

□

Beispiel 2.3 (Quasilineare elliptische Differentialgleichung in Nichtdivergenzform I)

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und $a_{ij}, b \in C^{0,\alpha}_{loc}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $i, j = 1, \dots, n$, $0 < \alpha < 1$, mit

$$a_{ij}(x, z, w)\xi_i \xi_j > 0$$

für $(x, z, w) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Wir betrachten das elliptische Randwertproblem

$$\begin{gathered} -a_{ij}(., u, \nabla u)\partial_{ij} u + b(., u, \nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Wir definieren die Abbildung $f : C^{2,\alpha}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\Omega)$ durch

$$f(u)(x) := -a_{ij}(x, u(x), \nabla u(x))\partial_{ij} u(x) + b(x, u(x), \nabla u(x)).$$

Dann ist f stetig, und Lösungen von (2.4) entsprechen den Nullstellen von f in

$$C^{2,\alpha,0}(\Omega) := \{u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\ \}.$$

$\square$

Beispiel 2.4 (Lineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform I)
Es sei $B \in L_2(X, \mathbb{R}) \cong L(X, X^*)$ eine beschränkte Bilinearform. Ist X ein Hilbertraum, so haben wir die natürliche Isomorphie $X \xrightarrow{\approx} X^*$ durch

$$(x \mapsto \langle x, . \rangle),$$

und wir ordnen B eine stetige, lineare Abbildung $B_0 \in L(X, X)$ durch

$$\langle B_0 x, y \rangle = B(x, y) \quad \text{für } x, y \in X$$

zu. Wir nehmen an, es gilt

$$B(x, x) \geq c_0 \parallel x \parallel^2 \quad \text{für } x \in X \tag{2.5}$$

für ein $c_0 > 0$.

Behauptung: (Satz von Lax-Milgram)
Dann ist $B : X \to X^*$ *ein Isomorphismus.*
Beweis:
Wir zeigen, daß $B_0 : X \to X$ ein Isomorphismus ist. Für $x \in X$ gilt

$$c_0 \parallel x \parallel^2 \leq B(x, x) = \langle B_0 x, x \rangle \leq \parallel B_0 x \parallel \parallel x \parallel,$$

also

$$c_0 \parallel x \parallel \leq \parallel B_0 x \parallel . \tag{2.6}$$

Daraus folgt, daß B_0 injektiv ist und $im(B_0)$ abgeschlossen ist.
Nun sei $z \in im(B_0)^\perp$. Dann gilt

$$0 = \langle B_0 z, z \rangle = B(z, z) \geq c_0 \parallel z \parallel^2,$$

also $z = 0$, und $im(B_0) = X$. Damit ist B_0 bijektiv, und mit (2.6) ist die Inverse stetig.

///

Wir betrachten die lineare elliptische Differentialgleichung

$$\begin{gathered} -\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_j \partial_j u + du = \varphi + div\ \psi \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{gathered} \tag{2.7}$$

mit $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und

$$\begin{gathered} a_{ij}, b_i, c_j, d \in L^\infty(\Omega), \varphi \in L^2(\Omega), \psi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n), \\ a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2 \quad \text{für } x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n, \end{gathered}$$

wobei $c_0 > 0$. Wir definieren die Bilinearform $B : W_0^{1,2}(\Omega) \times W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ durch

$$B(u, v) := \int_\Omega (a_{ij}\partial_j u \partial_i v + b_i u\ \partial_i v + c_j \partial_j u\ v + duv).$$

Nach Voraussetzung an a_{ij}, b_i, c_j und d ist $B \in L_2(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ stetig. In Erweiterung von Beispiel 2.2 ist $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine schwache Lösung von (2.7) genau dann, wenn

$$B(u,v) = \int_\Omega (\varphi v - \psi \nabla v) \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{2.8}$$

oder äquivalent

$$B(u,.) = \Lambda_{\varphi,\psi} \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$$

mit

$$\Lambda_{\varphi,\psi} v := \int_\Omega (\varphi v - \psi \nabla v)$$

und

$$B \in L(W_0^{1,2}(\Omega), W_0^{1,2}(\Omega)^*).$$

Mit der Hölder-Ungleichung erhalten wir die sogenannte Garding-Ungleichung

$$B(u,u) = \int_\Omega (a_{ij}\partial_j u \partial_i u + b_i u \partial_i u + c_j \partial_j u u + d u u) \geq \tilde{c}_0 \parallel \nabla u \parallel^2_{L^2(\Omega)} - C \parallel u \parallel^2_{L^2(\Omega)}, \tag{2.9}$$

wobei $\tilde{c}_0 > 0, C < \infty$. Vereinfachend nehmen wir hier

$$b_i, c_j = 0, \;\; d \geq 0 \tag{2.10}$$

an. Damit erhalten wir mit der Poincaré-Ungleichung, siehe Übungsaufgaben,

$$B(u,u) = \int_\Omega (a_{ij}\partial_j u \partial_i u + d u u) \geq c_0 \parallel \nabla u \parallel^2_{L^2(\Omega)} \geq \tilde{c}_0 \parallel u \parallel^2_{W_0^{1,2}(\Omega)},$$

wobei $\tilde{c}_0 > 0$. Nach dem Satz von Lax-Milgram ist B ein Isomorphismus, und so existiert genau ein u , das (2.8) erfüllt, also genau eine Lösung von (2.7).

Für $\psi = 0$ definieren wir den Lösungsoperator

$$\begin{aligned} T : L^2(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)^* &\to W_0^{1,2}(\Omega), \\ \varphi \mapsto \Lambda_{\varphi,0} &\mapsto B^{-1}\Lambda_{\varphi,0} = u, \end{aligned}$$

und sehen, daß $T \in L(L^2(\Omega), W_0^{1,2}(\Omega))$ stetig und linear ist.

$\square$

Wir kommen zur Differentiation.

Definition 2.2 *X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen und $f : U \to Y$. Die Richtungsableitung von f bezüglich $e \in X$ in $x \in U$ ist definiert durch*

$$\partial_e f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(x+te) - f(x)}{t},$$

falls der Limes existiert.

f heißt Gâteaux-differenzierbar in $x \in U$, falls $\partial_e f(x)$ für alle $e \in X$ existiert und für einen stetigen linearen Operator $T : X \to Y$

$$Te = \partial_e f(x)$$

erfüllt. Wir schreiben

$$\partial f(x) = T.$$

f heißt Fréchet-differenzierbar, kurz differenzierbar, in $x \in U$, falls ein stetiger linearer Operator $T : X \to Y$ mit

$$\| f(x+y) - f(x) - Ty \| = o(\| y \|)$$

existiert. Wir schreiben

$$Df(x) = f'(x) = T.$$

□

Wir bemerken, daß Fréchet-Differenzierbarkeit die Gâteaux-Differenzierbarkeit impliziert.

Beispiel:
X sei ein Banachraum und $f(x) := \| x \|$.

(i) Die Richtungsableitung $\partial_e f(x)$ existiert für alle $x, e \in X$.

(ii) Ist X^* strikt konvex, d.h. für

$$\Lambda_1 \neq \Lambda_2 \in X^*,\ \| \Lambda_1 \| = \| \Lambda_2 \| = 1,\ 0 < t < 1 \Longrightarrow \| (1-t)\Lambda_1 + t\Lambda_2 \| < 1,$$

so ist f in jedem Punkt $x \neq 0$ Gâteaux-differenzierbar.

(iii) Für $X = L^1(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ lebesguemeßbar, $\mathcal{L}^n(A) > 0$ ist f in keinem $u \in L^1(A)$ Fréchet-differenzierbar.

(iv) Für $X = L^p(A)$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ lebesguemeßbar $1 < p < \infty$, ist f in jedem $u \in L^p(A) - \{0\}$ Fréchet-differenzierbar.

Beweis:

(i) Die Funktion $(t \mapsto \| x + te \|)$ ist konvex, also existieren die einseitgen Ableitungen

$$\partial_e f(x) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\| x + te \| - \| x \|}{t},$$

und es gilt

$$|\partial_e f(x)| \leq \| e \|.$$

//

(ii) Es sei $x_0 \neq 0$. Mit dem Satz von Hahn-Banach gibt es $\Lambda_0 \in X^*$ mit $\| \Lambda_0 \| = 1$ und
$$\Lambda_0 x_0 = \| x_0 \| .$$
Da X^* strikt konvex ist, ist Λ_0 eindeutig.

Wir zeigen
$$\partial_e f(x_0) = \Lambda_0 e,$$
also ist f Gâteaux-differenzierbar in x_0 .

Wir setzen
$$p(e) := \partial_e f(x_0).$$
Es gilt
$$p(te) = tp(e) \quad \text{für } t \geq 0,$$
und
$$p(e_1 + e_2) \leq p(e_1) + p(e_2).$$
Nun definieren wir für gegebenes $e \in X, e \neq 0$, das lineare Funktional $\Lambda : span\{e\} \to \mathbb{R}$ durch
$$\Lambda te := tp(e).$$
Es gilt
$$\Lambda \leq p \quad \text{auf } span\{e\},$$
denn für $t \geq 0$ gilt
$$\Lambda te := tp(e) = p(te)$$
und
$$\Lambda(-te) := -tp(e) \leq tp(-e) = p(-te),$$
da $0 = p(0) \leq p(e) + p(-e)$.

Nach dem Satz von Hahn-Banach können wir Λ linear auf X fortsetzen mit
$$\Lambda \leq p \quad \text{auf } X.$$
Es gilt
$$\pm \Lambda x = \Lambda(\pm x) \leq p(\pm x) = \partial_{\pm x} f(x_0) \leq \| \pm x \|,$$
also ist Λ stetig mit
$$\| \Lambda \| \leq 1.$$
Andererseits
$$\Lambda(-x_0) \leq p(-x_0) = \partial_{-x_0} f(x_0) = - \| x_0 \|,$$
somit
$$\Lambda x_0 \geq \| x_0 \|,$$
und es folgt
$$\Lambda = \Lambda_0$$
aus der Eindeutigkeit von Λ_0 . Daraus folgt
$$\partial_e f(x_0) = p(e) = \Lambda e = \Lambda_0 e.$$

//

(iii), (iv) siehe Übungsaufgaben.

//

Einfache Rechenregeln ergeben sich aus folgenden Propositionen.

Proposition 2.1 *X, Y, Z seine Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$, $\emptyset \neq V \subseteq Y$ offen, und*

$$f : U \to V,\ g : V \to Z$$

seien differenzierbar in $x \in U$ und $y = f(x) \in V$. Dann ist $g \circ f$ differenzierbar in x , und es gilt

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x).$$

Beweis:
Es gilt

$$f(x+h) = f(x) + Df(x).h + o(\| h \|)$$

und

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x+h) &= g(f(x) + Df(x).h + o(\| h \|)) = \\ &= g(f(x)) + Dg(f(x)).(Df(x).h + o(\| h \|)) + o(Df(x).h + o(\| h \|)) = \\ &= g(f(x)) + Dg(f(x)) \circ Df(x).h + o(\| h \|),\end{aligned}$$

da

$$\| Df(x).h \| \leq \| Df(x) \| \| h \| .$$

Also ist $g \circ f$ in x differenzierbar, und es gilt

$$D(g \circ f)(x) = Dg(f(x)) \circ Df(x).$$

///

Proposition 2.2 *Es seien X, Y, Z, W Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen*

$$f : U \to Y,\ g : U \to Z$$

seien differenzierbar in $x \in U$, und

$$B : Y \times Z \to W$$

sei eine stetige, bilineare Abbildung.
Dann ist

$$B(f, g) : U \to W$$

differenzierbar in $x \in U$, und es gilt

$$D(B(f, g))(x).h = B(Df(x).h, g(x)) + B(f(x), Dg(x).h).$$

Beweis:
Es gilt

$$f(x+h) = f(x) + Df(x).h + o(\| h \|),$$
$$g(x+h) = g(x) + Dg(x).h + o(\| h \|).$$

Dies ergibt

$$B(f,g)(x+h) = B(f(x) + Df(x).h + o(\| h \|), g(x) + Dg(x).h + o(\| h \|)) =$$
$$B(f,g)(x) + B(Df(x).h, g(x)) + B(f(x), Dg(x).h) + R_h,$$

wobei

$$R_h := B(o(\| h \|), g(x)) + B(f(x), o(\| h \|)) + B(Df(x).h + o(\| h \|), Dg(x).h + o(\| h \|)).$$

Da B stetig ist, gilt

$$\| B(y,z) \| \leq \| B \| \, \| y \| \, \| z \| \quad \text{für } y \in Y, z \in Z,$$

und wir erhalten

$$\| R_h \| \leq \| B \| \, \Big((\| f(x) \| + \| g(x) \|) \, o(\| h \|)$$
$$+ (\| Df(x) \| + o(1)) \, (\| Dg(x) \| + o(1)) \, \| h \|^2 \Big) = o(\| h \|).$$

Daraus folgt die Behauptung.

///

Für Abschätzungen ist folgende Proposition nützlich.

Proposition 2.3 *X sei ein Banachraum, $a < b \in \mathbb{R}$ und*

$$f : [a,b] \to X$$

sei stetig auf $[a,b]$ und differenzierbar auf $]a,b[$. Weiter sei $\xi \in C^1([a,b], \mathbb{R})$ mit

$$\| f'(t) \| \leq \xi'(t) \quad \text{für } t \in]a,b[.$$

Dann gilt

$$\| f(b) - f(a) \| \leq \xi(b) - \xi(a), \tag{2.11}$$

insbesondere

$$\| f(b) - f(a) \| \leq \sup_{t \in]a,b[} \| f'(t) \| \; |b-a|. \tag{2.12}$$

Beweis:
(2.12) folgt aus (2.11) für

$$\xi(t) := t \sup_{s \in]a,b[} \| f'(s) \| \; .$$

Um (2.11) zu beweisen, bemerken wir, daß für $\Lambda \in X^*$ die Abbildung

$$\gamma(t) := \Lambda f(t)$$

stetig auf $[a,b]$, differenzierbar auf $]a,b[$ und

$$|\gamma'(t)| = |\Lambda.f'(t)| \leq \| \Lambda \| \ \xi'(t).$$

Dies ergibt

$$\Lambda(f(b) - f(a)) = \gamma(b) - \gamma(a) \leq \int_a^b |\gamma'| \leq \| \Lambda \| \ (\xi(b) - \xi(a)).$$

Mit dem Satz von Hahn-Banach wählen wir $\Lambda \in X^*$ mit $\| \Lambda \| = 1$ und

$$\Lambda(f(b) - f(a)) = \| f(b) - f(a) \| .$$

Dies ergibt (2.11).

///

Ist $f : U \to Y$ in jedem Punkt $x \in U$ differenzierbar, so ist die Ableitung eine Abbildung

$$Df : U \to L(X,Y),$$

und wir können Df auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit untersuchen.

Definition 2.3 *X, Y seien Banachräume und $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen. Wir definieren die Menge der stetigen Abbildungen*

$$C^0(U,Y) := \{ f : U \to Y \mid f \textit{ ist stetig in jedem Punkt } x \in U \ \}.$$

und die Menge der stetig differenzierbaren Funktionen

$$C^1(U,Y) := \{ f : U \to Y \mid \quad f \textit{ ist stetig und differenzierbar in jedem Punkt } x \in U \\ \textit{und } Df \in C^0(U, L(X,Y)) \ \}.$$

Höher differenzierbare Funktionen definieren wir induktiv für $k \geq 2$ als

$$C^k(U,Y) := \{ f \in C^1(U,Y) \mid Df \in C^{k-1}(U, L(X,Y)) \ \}.$$

Mit der natürlichen Isomorphie

$$L(X, L(X,Y)) \cong L_2(X,Y) := \{ B : X \times X \to Y \mid B \textit{ stetig und bilinear.} \ \}$$

identifizieren wir

$$D(Df)(x) \in L(X, L(X,Y)) \quad \textit{mit} \quad (D^2 f)(x) \in L_2(X,Y)$$

durch

$$(D^2 f)(x)(h_1, h_2) := ((D(Df)(x)).h_1).h_2$$

und betrachten allgemein

$$D^k f(x) \in L_k(X,Y) := \{ B : X \times \ldots \times X \to Y \mid B \textit{ stetig und } k\textit{-linear.} \ \}.$$

$\square$

Wir beginnen mit folgender Verallgemeinerung des Satzes von Schwarz.

Proposition 2.4 *Für* $f \in C^k(U,Y)$, $x \in U \subseteq X$ *, ist* $D^k f(x)$ *eine symmetrische* $k-$*lineare Abbildung.*

Beweis:
Es genügt $k = 2$ zu betrachten. Für $h_1, h_2 \in X, \Lambda \in Y^*$ und $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$\gamma(t_1, t_2) := \Lambda f(x + t_1 h_1 + t_2 h_2)$$

für $|t_i| < \varepsilon$ Da $f \in C^2(U,Y)$, ist γ zweifach stetig differenzierbar, und es gilt

$$\Lambda D^2 f(x)(h_1, h_2) = \partial_2 \partial_1 \gamma(0,0) = \partial_1 \partial_2 \gamma(0,0) = \Lambda D^2 f(x)(h_2, h_1),$$

also

$$D^2 f(x)(h_1, h_2) = D^2 f(x)(h_2, h_1),$$

da $\Lambda \in Y^*$ beliebig war.

///

Der Satz von Taylor gilt wie in der endlich-dimensionalen Analysis.

Proposition 2.5 (Satz von Taylor)
Es sei $f \in C^{k+1}(U,Y)$, $x + th \in U \subseteq X$ *für* $t \in [0,1]$ *. Dann gilt*

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} \frac{D^j f(x)(h, \ldots, h)}{j!} + R_{k+1}(x,h),$$

wobei das Restglied für jedes $\Lambda \in Y^*$ *die Identiät*

$$\Lambda R_{k+1}(x,h) = \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} \Lambda D^{k+1} f(x+th)(h, \ldots, h) \ \mathrm{d}t \tag{2.13}$$

erfüllt.

Beweis:
Für $\Lambda \in Y^*$ wenden wir den eindimensionalen Satz von Taylor auf die Funktion

$$\gamma(t) := \Lambda f(x + th)$$

an und erhalten

$$\gamma(1) = \sum_{j=0}^{k} \frac{\gamma^{(j)}(0)}{j!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} \gamma^{(k+1)}(t) \ \mathrm{d}t.$$

Da

$$\gamma^{(j)}(t) = \Lambda . D^j f(x+th)(h, \ldots, h),$$

folgt (2.13).

///

Im nächsten Paragraphen werden wir das Integral für banachraumwertige Funktionen definieren und erhalten dann

$$R_{k+1}(x,h) = \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(x+th)(h,\dots,h)\ \mathrm{d}t. \tag{2.14}$$

Im verbleibenden Teil dieses Paragraphen wollen wir den inversen und impliziten Funktionensatz auf Banachräume verallgemeinern.

Satz 2.1 (Inverser Funktionensatz)
X sei ein Banachraum, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen, $f \in C^1(U,X)$ und für $x_0 \in U$ sei

$$Df(x_0) \in L(X,X) \text{ invertierbar.}$$

Dann existieren offene Umgebungen $U(x_0) \subseteq U$ von x_0 und $V(y_0)$ von $y_0 = f(x_0)$, so daß

$$f : U(x_0) \xrightarrow{\approx} V(y_0)$$

bijektiv ist, und weiter existiert $g \in C^1(V(y_0), U(x_0))$ mit

$$g \circ f = id_{U(x_0)} \quad , \quad f \circ g = id_{V(y_0)}.$$

Schließich gilt

$$Dg(y_0) = Df(x_0)^{-1}. \tag{2.15}$$

Beweis:
Wir nehmen o.B.d.A. an, daß $x_0 = 0$,

$$f(0) = 0,$$
$$Df(0) = id_X,$$

und

$$\| Df(x) - id_X \| \leq 1/2 \quad \text{für } x \in \overline{B_\delta(0)} \subseteq U. \tag{2.16}$$

Für $x \in \overline{B_\delta(0)}$ und $y \in X$ gilt

$$f(x) = y \tag{2.17}$$

genau dann, wenn

$$x = x - f(x) + y.$$

Wir definieren $F : \overline{B_\delta(0)} \to X$ durch

$$F(x) = x - f(x) + y$$

und erhalten

$$\| DF(x) \| = \| id - Df(x) \| \leq 1/2 \quad \text{für } x \in B_\delta(0).$$

Dann folgt aus Proposition 2.3, daß

$$\| F(x_1) - F(x_2) \| \leq 1/2 \| x_1 - x_2 \|$$

und

$$\| F(x) \| \leq \| F(0) \| + 1/2 \| x \| \leq \| y \| + \delta/2.$$

Für $y \in B_{\delta/2}(0)$ folgt

$$F : \overline{B_\delta(0)} \to B_\delta(0),$$

und F hat mit dem Fixpunktsatz von Banach genau einen Fixpunkt in $B_\delta(0)$, d.h. es existiert genau eine Lösung $x \in B_\delta(0)$ von (2.17). Wir setzen

$$U(0) := B_\delta(0) \cap f^{-1}(B_{\delta/2}(0)) \quad , \quad V(0) := B_{\delta/2}(0),$$

und sehen, daß

$$f : U(0) \xrightarrow{\approx} V(0)$$

bijektiv ist. Die Inverse sei

$$g := f^{-1} : V(0) \to U(0).$$

Wir zeigen, daß g in 0 differenzierbar ist und (2.15) erfüllt, d.h.

$$Dg(0) = id_X. \tag{2.18}$$

Zuerst bemerken wir mit Proposition 2.3 und (2.16), daß

$$\| f(x) \| \leq 3/2 \| x \| \quad \text{für } x \in B_\delta(0).$$

Umgekehrt gilt für $f(x) = y \in B_{\delta/2}(0)$, daß $F(x) = x$ und somit

$$\| x \| = \| F(x) \| \leq \| y \| + 1/2 \| x \|,$$

also

$$\| x \| \leq 2 \| f(x) \| .$$

Da $Df(0) = id_X$, erhalten wir

$$y = f(x) = x + o(\| x \|) = g(y) + o(\| y \|),$$

also (2.18) und schließlich (2.15).

Durch verkleinern von $U(x_0)$ und $V(y_0)$ können wir annehmen, daß

$$Df(x) \quad \text{für alle } x \in U(x_0) \text{ invertierbar ist.}$$

Dann erhalten wir mit (2.15), daß

$$Dg(y) = Df(g(y))^{-1} \quad \text{für alle } y \in V(y_0)$$

und $g \in C^1(V(y_0), U(x_0))$.

///

Der Satz über implizite Funkionen folgt als Korollar.

Korollar 2.2 (Satz über implizite Funktionen)
$X, Y, Z,$ seien Banachräume, $\emptyset \neq W \subseteq X \times Y$ offen, $f \in C^1(W, Z)$ und für $(x_0, y_0) \in W$ gelte

$$f(x_0, y_0) = 0,$$

$$D_y f(x_0, y_0) \in L(Y, Z) \quad \text{ist ein Isomorphismus.}$$

Dann existieren offene Umgebungen $U(x_0)$ von x_0 und $V(y_0)$ von y_0 mit $U(x_0) \times V(y_0) \subseteq W$ und für jedes $x \in U(x_0)$ existiert genau ein $y \in V(y_0)$ mit

$$f(x, y) = 0.$$

Betrachten wir die Abbildung $g : U(x_0) \to V(y_0),\ x \mapsto y$, also

$$f(x, g(x)) = 0,$$

so ist $g \in C^1(U(x_0), V(y_0))$, und es gilt

$$Dg(x_0) = D_y f(x_0, y_0)^{-1} D_x f(x_0, y_0). \tag{2.19}$$

Beweis:
Wir betrachten die Abbildung $F : W \to X \times Z$ mit

$$F(x, y) := (x, f(x, y)).$$

Es gilt

$$DF(x_0, y_0).(v, w) = (v, D_x f(x_0, y_0).v + D_y f(x_0, y_0).w),$$

und, da $D_y f(x_0, y_0) \in L(Y, Z)$ ein Isomorphismus ist, ist auch

$$DF(x_0, y_0) \in L(X \times Y, X \times Z)$$

ein Isomorphismus.

Nach dem Satz über inverse Funktionen, Satz 2.1, existieren offene Umgebungen $W(x_0, y_0) \subseteq W$ von (x_0, y_0) und $\tilde{U}(x_0) \times Z(0)$ von $(x_0, 0) = F(x_0, y_0)$ in $X \times Z$, so daß

$$F : W(x_0, y_0) \xrightarrow{\approx} \tilde{U}(x_0) \times Z(0)$$

bijektiv ist, und die Inverse $G := F^{-1} \in C^1(\tilde{U}(x_0) \times Z(0), W(x_0, y_0))$.

Wir definieren $g \in C^1(\tilde{U}(x_0), Y)$ durch

$$g(x) := P_Y.G(x, 0),$$

wobei $P_Y : X \times Y \to Y$ die Projektion auf den zweiten Faktor ist.

Nun wählen wir eine offene Umgebung $U(x_0)$ von x_0 und $V(y_0)$ von y_0 mit

$$U(x_0) \times V(y_0) \subseteq W(x_0, y_0) \subseteq W,$$

$$U(x_0) \subseteq \tilde{U}(x_0),$$

$$g(U(x_0)) \subseteq V(y_0).$$

Dies ist möglich durch Verkleinern von $U(x_0)$, da $g(x_0) = y_0$, da $G(x_0, 0) = (x_0, y_0)$.

Damit gilt für $x \in U(x_0)$, daß

$$f(x, g(x)) = 0 \quad , \quad g(x) \in V(y_0). \tag{2.20}$$

Andererseits gilt für $(x, y) \in U(x_0) \times V(y_0)$ mit $f(x, y) = 0$, daß $(x, y) \in W(x_0, y_0)$ und

$$F(x, y) = (x, 0),$$

also $G(x, 0) = (x, y)$ und

$$y = g(x).$$

Schließlich folgt (2.19) aus (2.20), da wir $g \in C^1(U(x_0), V(y_0))$ bereits wissen.

///

3 Integration

In diesem Paragraphen definieren wir das Lebesgueintegral für banachraumwertige Funktionen. Dabei betrachten wir ein Maß μ auf dem Definitionsbereich Ω , d.h. eine Abbildung $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \mapsto [0, \infty]$ mit

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- $\mu(A) \leq \sum\limits_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$ für $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq \Omega$.

Eine Menge $A \subseteq \Omega$ heißt $\mu-$meßbar oder meßbar bezüglich μ , falls

$$\forall S \subseteq X : \mu(S) = \mu(S \cap A) + \mu(S - A).$$

Die Menge $\mathcal{A}_\mu$ der $\mu-$meßbaren Mengen bildet eine $\sigma-$Algebra auf Ω , und μ ist ein $\sigma-$additives Maß auf $\mathcal{A}_\mu$. Weiter gilt für $B \subseteq A$ mit $\mu(A) = 0$, daß B meßbar bezüglich μ ist, d.h. μ ist ein vollständiges Maß auf Ω .

Definition 3.1 *Es sei μ ein Maß auf einer Menge Ω und Y ein Banachraum. Eine Funktion $s : \Omega \to Y$ heißt einfach, falls $s(\Omega)$ endlich ist. Eine einfache Funktion heißt $\mu-$meßbar, falls*

$$s^{-1}(y) \textit{ ist } \mu - \textit{meßbar für alle } y \in Y.$$

Eine einfache, $\mu-$meßbare Funktion heißt $\mu-$integrierbar, falls

$$\int\limits_\Omega \parallel s \parallel \ \mathrm{d}\mu < \infty,$$

oder äquivalent

$$\mu(s^{-1}(y)) < \infty \quad \textit{für alle } y \in Y - \{0\},$$

und wir definieren das Lebesgueintegral durch

$$\int\limits_\Omega s \ \mathrm{d}\mu := \sum_{y \in Y - \{0\}} \mu(s^{-1}(y)) \ y. \tag{3.1}$$

Eine Funktion $f : \Omega \to Y$ heißt $\mu-$integrierbar, falls es eine Folge $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ einfacher, $\mu-$integriebarer Funktionen gibt, für die

$$\begin{aligned} & s_k \to f \quad \mu - \textit{fast überall}, \\ & \lim_{k,l \to \infty} \int\limits_\Omega \parallel s_k - s_l \parallel \ \mathrm{d}\mu = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Wir definieren dann

$$\int\limits_\Omega f \ \mathrm{d}\mu = \lim_{k \to \infty} \int\limits_\Omega s_k \ \mathrm{d}\mu \tag{3.3}$$

und

$$L^1(\mu, Y) := \{ f : \Omega \to Y \mid f \textit{ ist } \mu - \textit{integrierbar} \}.$$

□

Betrachten wir eine einfache Abbildung $s : \Omega \to Y$ als Abbildung $s : \Omega \to Y'$ für einen endlich dimensionalen Unterraum $Y' \subseteq Y$, der $span(s(\Omega))$ enthält, so sehen wir, daß $\mu-$Meßbarkeit, $\mu-$Integrierbarkeit und $\int_\Omega s \; \mathrm{d}\mu$ aus der rellen Theorie und der Definition 3.1 übereinstimmt. Insbesondere gilt:

(i) Ist s eine $\mu-$meßbare Funktion, so ist

$$\| s \| : \Omega \to \mathbb{R} \quad \mu - \text{meßbar}, \tag{3.4}$$

(ii) ist s weiter $\mu-$integrierbar, so folgt

$$\| \int\limits_\Omega s \; \mathrm{d}\mu \| \leq \int\limits_\Omega \| s \| \; \mathrm{d}\mu. \tag{3.5}$$

Insbesondere existiert der Limes in (3.3). Andererseits müssen wir zeigen, daß das Integral in (3.3) wohldefiniert ist.

Proposition 3.1 *Die Definition (3.3) ist unabhängig von der Wahl der Folge* $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *in (3.2).*

Beweis:
Wir müssen zeigen, daß für eine Folge einfacher, $\mu-$integriebarer Funktionen $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit

$$s_k \to 0 \quad \mu - \text{fast überall},$$
$$\lim_{k,l\to\infty} \int_\Omega \| s_k - s_l \| \; \mathrm{d}\mu = 0,$$

die Identität

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega s_k \; \mathrm{d}\mu = 0$$

folgt.

Gemäß (3.4) und (3.5) gilt

$$\| s_k \| \in L^1(\mu),$$
$$\| s_k \| \to 0 \quad \mu - \text{fast überall},$$
$$\lim_{k,l\to\infty} \int_\Omega | \;\; \| s_k \| - \| s_l \| \;\; | \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Damit ist $\| s_k \|$ eine Cauchyfolge in $L^1(\mu)$, die in $L^1(\mu)$ gegen 0 konvergiert. Daraus folgt

$$\| \lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega s_k \; \mathrm{d}\mu \| \leq \lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega \| s_k \| \; \mathrm{d}\mu = 0.$$

///

Einfache Eigenschaften des Lebesgueintegrals sind:

Proposition 3.2 *Es sei* $f \in L^1(\mu, Y)$ *. Dann gilt:*

(i) $\| f \|$ *ist* $\mu-$*integrierbar und*

$$\| \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \| \leq \int_\Omega \| f \| \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

(ii) Für eine stetige, lineare Abbildung $T \in L(Y, Z)$ *und* Z *ein Banachraum gilt* $T \circ f \in L^1(\mu, Z)$ *und*

$$\int_\Omega T \circ f \, \mathrm{d}\mu = T \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis:

(i) Es sei $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie in (3.2). Dann ist $\| s_k \|$ eine Cauchyfolge in $L^1(\mu)$, die $\mu-$fast überall gegen $\| f \|$ konvergiert. Daraus folgt $\| f \| \in L^1(\mu)$, also insbesondere $\mu-$meßbar und

$$\int_\Omega \| f \| \, \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Weiter folgt aus (3.3) und (3.5), daß

$$\| \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \| \leftarrow \| \int_\Omega s_k \, \mathrm{d}\mu \| \leq \int_\Omega \| s_k \| \, \mathrm{d}\mu \to \int_\Omega \| f \| \, \mathrm{d}\mu.$$

//

(ii) Wieder sei $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ wie in (3.2). Dann ist $T \circ s_k$ einfach und $\mu-$meßbar. Weiter gilt

$$\int_\Omega \| T \circ s_k \| \, \mathrm{d}\mu \leq \| T \| \int_\Omega \| s_k \| \, \mathrm{d}\mu < \infty,$$

$$T \circ s_k \to T \circ f \quad \mu - \text{fast überall},$$

und

$$\lim_{k,l\to\infty} \int_\Omega \| T \circ s_k - T \circ s_l \| \, \mathrm{d}\mu \leq \lim_{k,l\to\infty} \| T \| \int_\Omega \| s_k - s_l \| \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Wir erhalten aus (3.3)

$$\int_\Omega T \circ f \, \mathrm{d}\mu \leftarrow \int_\Omega T \circ s_k \, \mathrm{d}\mu = T \int_\Omega s_k \, \mathrm{d}\mu \to T \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu,$$

da T linear ist und $\int_\Omega s_k \, \mathrm{d}\mu$ nach (3.1) eine endliche Summe ist.

///

Mit der üblichen Identifikation

$$f = g \text{ in } L^1(\mu, Y) \Longleftrightarrow f = g \ \mu - \text{fast überall}$$

sehen wir, daß

$$\| f \|_{L^1(\mu,Y)} := \int\limits_\Omega \| f \| \ \mathrm{d}\mu$$

eine Norm auf $L^1(\mu, Y)$ ist.

Proposition 3.3 $L^1(\mu, Y)$ *ist ein Banachraum.*

Beweis:
Es sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $L^1(\mu, Y)$, d.h.

$$\lim_{k,l\to\infty} \int\limits_\Omega \| f_k - f_l \| \ \mathrm{d}\mu = 0. \tag{3.6}$$

Für $k \in \mathbb{N}$ existiert eine Folge $(s_{kj})_{j\in\mathbb{N}}$ wie in (3.2). Da $s_{kj} \to f_k$ $\mu-$fast überall, folgt mit dem Lemma von Fatou, daß

$$\int\limits_\Omega \| f_k - s_{kj} \| \ \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{i\to\infty} \int\limits_\Omega \| s_{ki} - s_{kj} \| \ \mathrm{d}\mu.$$

Also existieren einfache, $\mu-$integrierbare Funktionen s_k mit

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_\Omega \| f_k - s_k \| \ \mathrm{d}\mu = 0.$$

Aus (3.6) und der Dreiecksungleichung folgt

$$\lim_{k,l\to\infty} \int\limits_\Omega \| s_k - s_l \| \ \mathrm{d}\mu = 0.$$

Da es genügt zu zeigen, daß eine Teilfogle von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert, können wir annehmen, daß

$$\int\limits_\Omega \| s_k - s_{k+1} \| \ \mathrm{d}\mu \leq 2^{-k}.$$

Daraus folgt

$$\int\limits_\Omega \sum_{k=1}^{\infty} \| s_k - s_{k+1} \| \ \mathrm{d}\mu < \infty$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| s_k - s_{k+1} \| < \infty \quad \text{für } \mu - \text{fast überall auf } \Omega.$$

Da Y ein Banachraum ist, konvergiert

$$s_k = s_1 + \sum_{j=2}^{k}(s_j - s_{j-1}) \to s_1 + \sum_{j=2}^{\infty}(s_j - s_{j-1}) =: f \quad \mu - \text{fast überall.}$$

Nach Definition gilt $f \in L^1(\mu, Y)$, und es gilt wieder mit dem Lemma von Fatou

$$\int_\Omega \| f - s_k \| \ \mathrm{d}\ \mu \le \liminf_{l\to\infty} \int_\Omega \| s_l - s_k \| \ \mathrm{d}\ \mu,$$

also

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \| f - s_k \| \ \mathrm{d}\ \mu = 0$$

und schließlich

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \| f - f_k \| \ \mathrm{d}\ \mu = 0.$$

Dies ergibt

$$f_k \to f \quad \text{in } L^1(\mu, Y).$$

///

Auch der Satz von Lebesgue überträgt sich auf den banachraumwertigen Fall.

Proposition 3.4 *Es sei* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge in* $L^1(\mu, Y)$, $f : \Omega \to Y$ *und* $g \in L^1(\mu)$ *mit*

(i) $f_k \to f$ $\mu-$*fast überall.*

(ii) $\| f_k \| \le g$ $\mu-$*fast überall.*

Dann gilt $f \in L^1(\mu, Y)$ *und*

$$f_k \to f \quad \textit{in } L^1(\mu, Y).$$

Beweis:
Nach Proposition 3.2 sind $\| f_k \|$ $\mu-$meßbar und weiter gilt

$$\| f_k - f_l \| \le 2g \quad \mu - \text{fast überall,}$$
$$\| f_k - f_l \| \to 0 \quad \mu - \text{fast überall für } k, l \to \infty.$$

Dann folgt mit dem Satz von Lebesgue

$$\lim_{k,l\to\infty} \int_\Omega \| f_k - f_l \| \ \mathrm{d}\mu = 0,$$

und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $L^1(\mu, Y)$. Also konvergiert $f_k \to \tilde{f}$ in $L^1(\mu, Y)$, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \| \tilde{f} - f_k \| \ \mathrm{d}\mu = 0. \tag{3.7}$$

Andererseits folgt mit dem Lemma von Fatou

$$\int\limits_\Omega \| f - f_k \| \; d\mu \leq \liminf_{l \to \infty} \int\limits_\Omega \| f_l - f_k \| \; d\mu,$$

und somit

$$\lim_{k \to \infty} \int\limits_\Omega \| f - f_k \| \; d\mu = 0.$$

Aus (3.7) folgt mit der Dreiecksungleichung

$$\int\limits_\Omega \| f - \tilde{f} \| \; d\mu = 0,$$

also

$$f = \tilde{f} \quad \mu - \text{fast überall.}$$

Mit (3.2) folgt $f \in L^1(\mu, Y)$ und

$$f_k \to f \quad \text{in } L^1(\mu, Y).$$

///

Im Rest des Paragraphen wollen wir $\mu-$Integrierbarkeit einer Funktion $f : \Omega \to Y$ durch Eigenschaften von f charakterisieren. Dazu definieren wir.

Definition 3.2 *Es sei μ ein Maß auf einer Menge Ω und Y ein Banachraum. Eine Funktion $f : \Omega \to Y$ heißt $\mu-$meßbar, falls*

(i) $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ für alle $U \subseteq Y$ offen,

(ii) es existiert eine $\mu-$Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ mit

$$f(\Omega - N) \quad \textit{ist separabel.}$$

□

Da das Bild einfacher Funktionen endlich ist, ist $\mu-$Meßbarkeit für einfache Funktionen aus Definitionen 3.1 und 3.2 äquivalent.

$\mu-$Meßbarkeit überträgt sich in folgenden Situationen.

Proposition 3.5 *(i) Es seien $f_k : \Omega \to Y$ $\mu-$meßbar und*

$$f_k \to f \quad \mu - \textit{fast überall.}$$

Dann ist f auch $\mu-$meßbar.

(ii) $f : \Omega \to Y$ sei $\mu-$meßbar, Z ein Banachraum und $\varphi : Y \to Z$ borelmeßbar, d.h.

$$\varphi^{-1}(U) \textit{ ist eine Borelmenge für alle } U \subseteq Z \textit{ offen,}$$

und φ bildet separable Mengen in Y in separable Mengen in Z ab.

Dann ist $\varphi \circ f$ auch $\mu-$meßbar.

Beweis:

(i) Es gibt eine $\mu-$Nullmenge N , so daß

$$f_k \to f \quad \text{auf } \Omega - N,$$
$$f_k(\Omega - N) \quad \text{ist separabel.}$$

Zuerst gilt

$$f(\Omega - N) \subseteq \overline{\cup_{k=1}^{\infty} f_k(\Omega - N)},$$

und, da die abzählbaren Vereinigungen separabler Mengen, der Abschluß und Teilmengen in metrischen Räumen von separablen Mengen wieder separabel sind, ist auch $f(\Omega - N)$ separabel.

Für $A \subseteq Y$ abgeschlossen und die offenen Umgebungen $U_{1/k}(A) := \{y \in Y \mid d(y, A) < 1/k \}$ gilt

$$f^{-1}(A) - N = \cap_{k=1}^{\infty} \cup_{i=1}^{\infty} \cap_{i=j}^{\infty} f_i^{-1}(U_{1/k}(A)) - N.$$

Damit ist $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$ und somit

$$f^{-1}(U) \in \mathcal{A} \quad \text{für alle } U \subseteq Y \text{ offen.}$$

//

(ii) Da f $\mu-$meßbar ist, existiert eine $\mu-$Nullmenge N mit $f(\Omega - N)$ separabel. Da φ separable Mengen in separable Mengen abbildet, ist auch $(\varphi \circ f)(\Omega - N)$ separabel.

Da $\mathcal{A}$ eine $\sigma-$Algebra ist und $f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ für $U \subseteq Y$ offen, gilt

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \text{für alle Borelmengen } B \text{ von Y.}$$

Da φ borelmeßbar ist, ist $\varphi^{-1}(V)$ eine Borelmenge in Y für alle $V \subseteq Z$ offen und somit

$$(\varphi \circ f)^{-1}(V) \in \mathcal{A}.$$

///

Insbesondere gilt: ist f $\mu-$meßbar, so ist $\| f \|$ auch $\mu-$meßbar.

Wir erhalten folgendes Kriterium für $\mu-$Integrierbarkeit.

Proposition 3.6 *Es gilt*

$$f \in L^1(\mu, Y) \Longleftrightarrow \quad f \textit{ ist } \mu - \textit{meßbar}, \int_\Omega \| f \| \; \mathrm{d}\mu < \infty.$$

Beweis:

($\Longrightarrow$):

Aus Proposition 3.2 (ii) folgt $\int_\Omega \| f \| \; \mathrm{d}\mu < \infty$. Nun sei $(s_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wie in (3.2). Da s_k $\mu-$meßbar sind und $s_k \to f$ $\mu-$fast überall, so folgt mit Proposition 3.5 (i), daß auch f $\mu-$meßbar ist.

//

($\Longleftarrow$):
Da f $\mu-$meßbar ist, existiert eine $\mu-$Nullmenge N mit $f(\Omega - N)$ separabel. Wir wählen eine abzählbar dichte Teilmenge $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ von $f(\Omega - N)$, und sehen für alle $k \in \mathbb{N}$, daß

$$f(\Omega - N) \subseteq \cup_{j=1}^{\infty} B_{1/k}(y_j).$$

Wir definieren induktiv

$$A_1 := f^{-1}(B_{1/k}(y_1)) - N,$$
$$A_j := f^{-1}(B_{1/k}(y_j)) - \cup_{i=1}^{j-1} A_i - N.$$

Da f $\mu-$meßbar ist, sind $A_j \in \mathcal{A}$. Weiter gilt

$$\Omega - N = \sum_{j=1}^{\infty} A_j,$$

und diese Vereinigung ist disjunkt.

Falls $\| y_j \| \leq 1/k$, so setzen wir $\tilde{y}_j = 0$.

Falls $\| y_j \| > 1/k$, so setzen wir

$$\tilde{y}_j := y_j - \frac{1}{k} \frac{y_j}{\| y_j \|},$$

und erhalten für $y \in B_{1/k}(y_j)$, daß

$$\| \tilde{y}_j \| = \| y_j \| - \frac{1}{k} \leq \| y_j \| - \| y - y_j \| \leq \| y \| .$$

In jedem Fall gilt

$$\| y_j - \tilde{y}_j \| \leq 1/k,$$
$$\| \tilde{y}_j \| \leq \| y \| \quad \text{für alle } y \in B_{1/k}(y_j).$$

Nun definieren wir

$$s_k := \sum_{j=1}^{\infty} \chi_{A_j} \tilde{y}_j$$

und

$$s_{kl} := \sum_{j=1}^{l} \chi_{A_j} \tilde{y}_j.$$

Es gilt

$$\| s_{kl} \| \leq \| s_k \| \leq \| f \|,$$
$$\| (f - s_k)(x) \| \leq 2/k \quad \text{für } x \in \Omega - N,$$

insbesondere

$$s_k \to f \quad \mu - \text{fast überall},$$
$$s_{kl} \to s_k \quad \text{für } l \to \infty,$$

und

$$s_{kl} \text{ ist einfach und } \mu - \text{meßbar.}$$

Zuerst folgt

$$\int\limits_{\Omega} \| s_{kl} \| \ \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_{\Omega} \| f \| \ \mathrm{d}\mu < \infty$$

und $s_{kl} \in L^1(\mu, Y)$.

Da $\| f \| \in L^1(\mu, Y)$, folgt mit dem Satz von Lebesgue, Proposition 3.4, daß

$$s_k \in L^1(\mu, Y)$$

und schließlich

$$f \in L^1(\mu, Y).$$

///

Als einfache Konsequenz ergibt sich.

Proposition 3.7 *Es sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, μ ein Radon-Maß auf K und $f : K \to Y$ stetig. Dann gilt*

$$f \in L^1(\mu, Y).$$

Beweis:

Da K kompakt ist und f stetig, ist $f(K) \subseteq Y$ kompakt und als kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes separabel.

Da f stetig ist, gilt für alle $U \subseteq Y$ offen, daß $f^{-1}(U)$ relativ offen in K ist, also insbesondere eine Borelmenge ist. Damit ist f meßbar bezüglich μ .

Da schließlich f beschränkt und $\mu(K) < \infty$, folgt

$$\int\limits_{K} \| f \| \ \mathrm{d}\mathcal{L}^n < \infty,$$

und $f \in L^1(\mu, Y)$ mit Proposition 3.6.

///

Daraus erhalten wir, daß in der Situation von Proposition 2.5

$$I := \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} D^{k+1} f(x+th)(h, \ldots, h) \ \mathrm{d}t \in Y$$

existiert.

Dann folgt mit (2.13) und Proposition 3.2 (ii) für $\Lambda \in Y^*$, daß

$$\Lambda . R_{k+1}(x,h) = \Lambda . I$$

und mit dem Satz von Hahn-Banach, daß

$$R_{k+1}(x,h) = I,$$

also (2.14) wie gewünscht.

4 Nichtlineare Abbildungen

In diesem Paragraphen stellen wir verschiedene nichtlineare Abbildungen vor.

Definition 4.1 *X, Y seine Banachräume und $\emptyset \neq M \subseteq X$. Eine Abbildung $f : M \to Y$ heißt kompakt, falls f stetig ist und beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen abbildet.*

□

Kompakte Abbildungen bilden den Abschluß von stetigen, beschränkten Abbildungen mit endlich-dimensionalem Bild, wenn M beschränkt ist.

Proposition 4.1 *Für beschränktes M ist $f : M \to Y$ genau dann kompakt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine stetige, beschränkte Abbildung*

$$f_\varepsilon : M \to Y_\varepsilon$$

mit $Y_\varepsilon \subseteq Y$ endlich-dimensional existiert, die

$$\| f - f_\varepsilon \|_{L^\infty(M)} \leq \varepsilon$$

erfüllt. Weiter kann f_ε so gewählt werden, daß

$$f_\varepsilon(M) \subseteq convex\ f(M).$$

Beweis:
($\Longrightarrow$):
Da f kompakt und M beschränkt ist, ist $\overline{f(M)}$ kompakt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existieren $y_1, \ldots, y_m \in f(M)$ mit

$$\overline{f(M)} \subseteq \cup_{i=1}^m B_\varepsilon(y_i).$$

Wir definieren

$$\varphi_j : M \to [0, 1]$$

durch

$$\varphi_j(x) := \frac{d(f(x), Y - B_\varepsilon(y_j))}{\sum\limits_{i=1}^m d(f(x), Y - B_\varepsilon(y_i))}.$$

Es gilt

$$\sum_{j=1}^m \varphi_j = 1 \quad \text{auf } M.$$

Wir definieren

$$f_\varepsilon := \sum_{j=1}^m \varphi_j\ y_j$$

und

$$Y_\varepsilon := span\{y_1, \ldots, y_m\} \subseteq Y.$$

Es gilt

$$\| f - f_\varepsilon \| \leq \varepsilon \quad \text{auf } M$$

und

$$f_\varepsilon(M) \subseteq convex\ \{y_1, \ldots, y_m\} \subseteq convex\ f(M)$$

ist beschränkt.

//

($\Longleftarrow$):
Zuerst ist f als gleichmäßiger Limes von stetigen Funktionen wieder stetig. Nun sei $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge in M . Da $f_{1/k}(M) \subseteq Y_{1/k}$ beschränkt ist, können wir für eine Teilfolge annehmen, daß

$$f_{1/k}(x_i) \quad \text{für } i \to \infty \text{ und alle } k \in \mathbb{N} \text{ konvergiert.}$$

Dann gilt

$$\limsup_{i,j\to\infty} \| f(x_i) - f(x_j) \| \leq 2/k$$

und $(f(x_i))_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge, also konvergent.

///

Beispiel 4.1 (Spektraltheorie für den Laplaceoperator)
Wir betrachten für $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n,\ 1 \leq p < \infty$ die Einbettung

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Behauptung: (Satz von Rellich)
Diese Einbettung ist eine kompakte, lineare Abbildung.
Beweis:
Es sei $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $W_0^{1,p}(\Omega)$, d.h.

$$\| u_j \|_{L^p(\Omega)},\ \| \nabla u_j \|_{L^p(\Omega)} < \Lambda.$$

Wir müssen zeigen, daß eine Teilfolge in $L^p(\Omega)$ konvergiert. Da $C_0^\infty(\Omega)$ in $W_0^{1,p}(\Omega)$ dicht liegt, nehmen wir o.B.d.A. $u_j \in C_0^\infty(\Omega)$ an.

Wir wählen $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0)),\ \varphi \geq 0,\ \int \varphi = 1$ und setzen

$$\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\varepsilon}).$$

Für $\varepsilon > 0$ definieren wir

$$u_{j\varepsilon}(x) := \int \varphi_\varepsilon(x-z)u_j(z)\ \mathrm{d}z$$

und sehen

$$u_{j\varepsilon} \in C_0^\infty(\Omega_\varepsilon)$$

mit $\Omega_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,\Omega) < \varepsilon\}$. Es gilt

$$|u_{j\varepsilon}(x) - u_{j\varepsilon}(y)| \leq C_\varepsilon |x-y| \int |u_j| \leq C_\varepsilon(\Omega) \| u_j \|_{L^p(\Omega)} |x-y|.$$

und $(u_{j\varepsilon})_{j\in\mathbb{N}}$ ist für festes $\varepsilon > 0$ gleichgradig stetig.

Da $\overline{\Omega_\varepsilon}$ kompakt ist, konvergiert nach dem Satz von Arzela-Ascoli eine Teilfolge gleichmäßig, insbesondere für diese Teilfolge

$$\lim_{i,j\to\infty} \| u_{i\varepsilon} - u_{j\varepsilon} \|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

Nun zeigen wir

$$\| u_{j\varepsilon} - u_j \|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon \| \nabla u_j \|_{L^p(\Omega)} \leq \Lambda\varepsilon. \tag{4.1}$$

Wählen wir sukzessive Teilfolgen für $\varepsilon_k \to 0$, so folgt aus (4.1)

$$\lim_{i,j\to\infty} \| u_i - u_j \|_{L^p(\Omega)} = 0$$

und $(u_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in $L^p(\Omega)$.

Beim Beweis von (4.1) unterdrücken wir den Index j . Es gilt

$$|u(x) - u_\varepsilon(x)| \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(z)\ |u(x) - u(x-z)|\ \mathrm{d}z \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^1 \varphi_\varepsilon(z)\ |\nabla u(x-tz)||z|\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}z$$

und

$$\| u - u_\varepsilon \|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(z)|z|^p\ |\nabla u(x-tz)|^p\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}t\ \mathrm{d}z \leq \varepsilon^p \| \nabla u \|^p_{L^p(\Omega)},$$

also (4.1).

///

Nun betrachten wir den Lösungsoperator aus Beispiel 2.4 als Endomorphismus

$$T : L^2(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

T ist ein kompakter, linearer Operator.

Wir nehmen an, daß a_{ij} symmetrisch ist, d.h.

$$a_{ij} = a_{ji},$$

und $b_i = c_j = 0$ und $d \geq 0$.

Für $\varphi, \psi \in L^2(\Omega),\ u = T\varphi,\ v = T\psi$ gilt

$$\langle T\varphi, \psi\rangle_{L^2(\Omega)} = \int\limits_\Omega u\psi = \int\limits_\Omega (a_{ij}\partial_j v \partial_i u + dvu) = \int\limits_\Omega \varphi v = \langle \varphi, T\psi\rangle_{L^2(\Omega)},$$

und T ist selbstadjungiert. Dann existiert mit dem Spektralsatz für normale, kompakte Operatoren auf separablen Hilberträumen eine Orthonormalbasis

$$\{u_k\}_{k\in\mathbb{N}} \text{ von } L^2(\Omega)$$

aus Eigenvektoren von T zu den Eigenwerten $\mu_k \in \mathbb{R}$ mit

$$\mu_k \to 0 \quad \text{für } k \to \infty.$$

Es gilt $\mu_k \neq 0$, da $ker\ T = \{0\}$, denn sei $T\varphi = 0$, so gilt für $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, daß

$$\int\limits_\Omega \varphi v = \int\limits_\Omega (a_{ij}\partial_j 0\ \partial_i v + d\ 0v) = 0,$$

also $\varphi = 0$, da $C_0^\infty(\Omega)$ dicht in $L^2(\Omega)$ ist.

Wir setzen

$$\lambda_k := \mu_k^{-1}$$

und bemerken

$$u_k = \lambda_k T u_k \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Es folgt

$$\mu_k = \mu_k \langle u_k, u_k \rangle = \int_\Omega T u_k \; u_k = \int_\Omega (a_{ij} \partial_j T u_k \partial_i T u_k + d|T u_k|^2) \geq 0$$

und somit

$$0 < \lambda_k \to \infty \quad \text{für } k \to \infty.$$

Wir ordnen

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$$

Wir sehen

$$-\partial_i(a_{ij}\partial_j u_k) + d u_k = \lambda_k u_k \quad \text{in } \Omega,$$
$$u_k = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Betrachten wir den Laplaceoperator, d.h. $a_{ij} = \delta_{ij},\ d = 0$, so erhalten wir

$$-\Delta u_k = \lambda_k u_k \quad \text{in } \Omega,$$
$$u_k = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Dann gilt

$$\int_\Omega \nabla u_k \nabla u_l = \lambda_k \int_\Omega \nabla T u_k \; \nabla u_l = \lambda_k \int_\Omega u_k u_l = \lambda_k \delta_{kl}.$$

Nun sei $u \in W_0^{1,2}(\Omega) \subseteq L^2(\Omega)$, also

$$u = \sum_{k=1}^\infty \alpha_k u_k$$

mit geeigneten $\alpha_k \in \mathbb{R}$.

Weiter gilt

$$\int_\Omega \nabla u \nabla u_k = \lambda_k \int_\Omega u \; u_k = \lambda_k \alpha_k,$$

also, da $(\lambda_k^{-1/2} \nabla u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ orthonormal sind, folgt

$$\| \nabla u \|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \sum_{k=1}^\infty \lambda_k \alpha_k^2 \geq \lambda_1 \sum_{k=1}^\infty \alpha_k^2 = \lambda_1 \| u \|_{L^2(\Omega)}^2 .$$

Daraus folgt

$$\| u \|_{L^2(\Omega)} \leq \lambda_1^{-1/2} \| \nabla u \|_{L^2(\Omega)},$$

und die Poincaré-Ungleichung in $W_0^{1,2}(\Omega)$ ist für $C = \lambda_1^{-1/2}$ erfüllt. Dies ist optimal, da für $u = u_1$ Gleichheit gilt.

Ist schließlich $\partial\Omega$ glatt, so kann man mit elliptischer Regularitätstheorie zeigen, daß aus

$$-\Delta u = \varphi$$

im schwachen Sinne für $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, $\varphi \in W^{l,2}(\Omega)$, $l = 0, \ldots,$ mit $W^{0,2}(\Omega) = L^2(\Omega)$, die höhere Regularität

$$u \in W^{l+2,2}(\Omega)$$

folgt, siehe [GT] Theorem 8.13. Somit gilt $u_k \in W^{l,2}(\Omega)$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und mit Sobolev-Einbettungssaätzen ergibt sich

$$\begin{aligned} u_k &\in C^\infty(\overline{\Omega}), \\ u_k &= 0 \text{ auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

□

Definition 4.2 *X sei ein Banachraum und $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen. Eine Abbildung $f \in C^0(U, X^*)$ heißt Gradientenabbildung, falls ein $F \in C^1(U, \mathbb{R})$ mit*

$$f = DF$$

existiert.

□

Folgende Bedingungen sind äquivalent.

Proposition 4.2 *X sei ein Banachraum, und $\emptyset \neq U \subseteq X$ sei offen und konvex. Für $f \in C^1(U, X^*)$ sind folgende Bedingungen äquivalent.*

(i) f ist eine Gradientenabbildung.

(ii) Für einen C^1-Weg $\gamma : [0,1] \to U$ in U ist

$$\int\limits_\gamma f := \int\limits_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{d}t$$

wegunabhängig.

(iii) Für $x \in U$ ist

$$f'(x) \in L(X, X^*) \cong L_2(X, \mathbb{R})$$

symmetrisch.

Beweis:
(i) $\Rightarrow$ *(ii)*:
Da $f = DF$, gilt

$$\int\limits_\gamma f = \int\limits_0^1 f(\gamma(t))\gamma'(t)\ \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(F(\gamma(t)))\ \mathrm{d}t = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

//

$(ii) \Rightarrow (i)$:
O.B.d.A. sei $0 \in U$. Wir definieren

$$F(x) := \int_0^1 f(tx).x \, \mathrm{d}t.$$

Da das Integral wegunabhängig ist, gilt

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^1 f(x+th).h \, \mathrm{d}t$$

und

$$DF(x) = f(x).$$

//

$(i) \Rightarrow (iii)$:
Da $f = DF$, gilt

$$_{X^*}\langle f'(x)h_1, h_2\rangle_X = D^2F(x)(h_1,h_2) = D^2F(x)(h_2,h_1) = \ _{X^*}\langle f'(x)h_2, h_1\rangle_X.$$

//

$(iii) \Rightarrow (i)$:
Wieder sei o.B.d.A. $0 \in U$ und wir definieren

$$F(x) := \int_0^1 f(tx).x \, \mathrm{d}t.$$

Es gilt

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^1 f(tx+th).h \, \mathrm{d}t + \int_0^1 (f(tx+th) - f(tx))).x \, \mathrm{d}t.$$

Für den zweiten Term gilt

$$\int_0^1 \langle f(tx+th) - f(tx)), x\rangle \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \int_0^t \langle f'(tx+sh).h, x\rangle \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^1 \int_s^1 \langle f'(tx+sh).x, h\rangle \, \mathrm{d}t \, \mathrm{d}s = \int_0^1 \langle f(x+sh) - f(sx+sh)), h\rangle \, \mathrm{d}s,$$

und es folgt

$$F(x+h) - F(x) = \int\limits_0^1 f(x+th).h \, \mathrm{d}t,$$

also

$$DF(x) = f(x).$$

///

Beispiel 4.2
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen und $A : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $\Phi : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ seinen Caratheodoryfunktionen mit

$$|D_w^2 A(x,w)|, |D_z^2 \Phi(x,z)| \leq C,$$
$$A(.,0),\; D_w A(.,0),\; \Phi(.,0),\; D_z\Phi(.,0) \in L^2(\Omega)$$

und

$$\partial_{w_i,w_j} A(x,w)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2$$

für ein $c_0 > 0$.

Wir definieren $F : W_0^{1,2}(\Omega) \to \mathbb{R}$ mit

$$F(u) := \int\limits_\Omega (A(.,\nabla u) + \Phi(.,u)).$$

Dann gilt $F \in C^2(W_0^{1,2}(\Omega), \mathbb{R})$ und

$$DF(u).v = \int\limits_\Omega (\partial_{w_i} A(.,\nabla u)\partial_i v + D_z\Phi(.,u)v).$$

Setzen wir in Beispiel 2.2

$$A_i(x,z,w) = \partial_{w_i} A(x,w),$$
$$B(x,z,w) = D_z\Phi(x,z),$$

so sehen wir, daß

$$f(u) := -\partial_i(A_i(.,\nabla u)) + B(.,u)$$

eine Gradietenabbildung ist.

Weiter gilt

$$D^2F(u)(v_1,v_2) = \langle f'(u).v_1, v_2\rangle = \int\limits_\Omega (\partial_{w_iw_j} A(.,\nabla u)\partial_i v_1 \partial_j v_2 + D_z^2\Phi(.,u)v_1v_2)$$

und $f'(u)$ ist ein linearer Differentialoperator wie in Beispiel 2.4

$$f'(u).v = -\partial_i(a_{ij}\partial_j v) + cv$$

mit $a_{ij} = \partial_{w_iw_j} A(.,\nabla u)$ und $d = D_z^2\Phi(.,u)$.

□

Definition 4.3 *X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq M \subseteq X$ und $f : M \to X$.*
f heißt koerziv, falls für $x_j \in M$ gilt

$$\| x_j \| \to \infty \Longrightarrow \| f(x_j) \| \to \infty.$$

f heißt eigentlich, falls f stetig ist und

$$f^{-1}(C) \text{ ist relativ kompakt für alle kompakten } C \subseteq Y. \tag{4.2}$$

□

(4.2) ist äquivalent zu der Bedingung:
Für $x_j \in M$ mit $f(x_j) \to y$ folgt, daß

$$x_j \text{ hat eine konvergente Teilfolge.} \tag{4.3}$$

Folgende Bedingungen sind äquivalent.

Proposition 4.3 *X, Y seien Banachräume und $f \in C^0(X, Y)$. Dann sind folgende Bedingungen äquivalent.*

(i) f ist eigentlich.

(ii) f ist abgeschlossen und $f^{-1}(y)$ ist kompakt für alle $y \in Y$.

(iii) f ist koerziv, falls X und Y endlich-dimensional sind.

Beweis:
$(i) \Rightarrow (ii)$:
Da $\{y\} \subseteq Y$ kompakt ist, folgt $f^{-1}(y)$ ist kompakt. Nun sei $A \subseteq X$ abgeschlossen und $x_j \in A$ mit $f(x_j) \to y$. Aus (4.3) folgt, daß

$$x_j \to x \in A$$

für eine Teilfolge. Also gilt $y = f(x) \in f(A)$.

//

$(ii) \Rightarrow (i)$:
Es sei $C \subseteq Y$ kompakt und $D := f^{-1}(C)$. Wir müssen zeigen, daß D kompakt ist. Dazu sei $\{D_\alpha\}_{\alpha \in I}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von D mit der endlichen Durchschnittseignschaft, d.h.

$$E_{I'} := \cap_{\alpha \in I'} D_\alpha \neq \emptyset \quad \text{für alle endlichen } I' \subseteq I.$$

Wir müssen

$$\cap_{\alpha \in I} D_\alpha \neq \emptyset \tag{4.4}$$

zeigen.

Die $E_{I'}$ sind abgeschlossen, und, da f abgeschlossen ist, ist

$$f(E_{I'}) \subseteq C \quad \text{abgeschlossen.}$$

Für endlich viele $(I'_i)_{i=1,\ldots,k}$ ist $I'' := \cup_{i=1}^k I'_i$ wieder endlich, und es gilt

$$\cap_{i=1}^k f(E_{I'_i}) \supseteq f(\cap_{i=1}^k E_{I'_i}) = f(E_{I''}) \neq \emptyset.$$

Da C kompakt ist, existiert

$$y \in \cap_{I'} f(E_{I'}) \neq \emptyset.$$

Daraus folgt

$$\cap_{\alpha \in I'}(D_\alpha \cap f^{-1}(y)) = E_{I'} \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset, \tag{4.5}$$

da $y \in f(E_{I'})$.

Andererseits ist $f^{-1}(y)$ nach Voraussetzung kompakt und $D_\alpha \cap f^{-1}(y)$ abgeschlossen. Damit folgt aus (4.5)

$$\cap_{\alpha \in I} D_\alpha \supseteq \cap_{\alpha \in I}(D_\alpha \cap f^{-1}(y)) \neq \emptyset,$$

also insbesondere (4.4).

//

(ii) $\Leftrightarrow$ *(iii)*:
Falls X und Y endlich-dimensional sind, so besagt Eigentlichkeit von f gerade, daß die Urbilder von beschränkten Mengen unter f wieder beschränkt sind. Dies ist Koerzivität.

///

Koerzive Abbildungen sind in folgenden Situationen eigentlich.

Proposition 4.4 *X, Y seien Banchräume und $f \in C^0(X,Y)$ sei koerziv. Dann ist f eigentlich, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.*

(i) f ist eine kompakte Störung einer eigentlichen Abbildung.

(ii) X ist reflexiv und für $x_j, x \in X$ gilt

$$x_j \to x \textit{ schwach in } X\ , f(x_j) \textit{ konvergiert stark } \Longrightarrow x_j \to x \textit{ stark in } X.$$

Beweis:
Es sei $x_j \in X$ mit $f(x_j) \to y$. Da f koerziv ist, folgt, daß $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

(i) Nun ist $f = g + C$ mit g eigentlich und C kompakt. Für eine Teilfolge konvergiert $C(x_j) \to \tilde{y}$, also $g(x_j) \to y - \tilde{y}$. Da g eigentlich ist, konvergiert eine Teilfolge von $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$.

//

(ii) Da X reflexiv ist, konvergiert eine Teilfolge $x_j \to x$ schwach. Da $f(x_j) \to y$, folgt nach Voraussetzung $x_j \to x$ stark in X .

///

Eigentliche Abbildungen haben die Eigenschaften, daß sich Lösungen der Gleichung

$$f(x) = y$$

stabil bei Störungen von y in folgendem Sinne verhalten.

Proposition 4.5 *X, Y seien Banchräume, $\emptyset \neq M \subseteq X$ abgeschlossen und $f \in C^0(M, Y)$ sei eigentlich. Dann existiert zu $y \in Y, \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit*

$$\| f(x) - y \| < \delta \Rightarrow d(x, f^{-1}(y)) < \varepsilon \quad \textit{für alle } x \in M.$$

Beweis:
Angenommen, die Aussage ist falsch für ein $y \in Y, \varepsilon > 0$. Dann existiert $x_j \in M$ mit

$$f(x_j) \to y,$$

aber

$$d(x_j, f^{-1}(y)) \geq \varepsilon.$$

Mit (4.3) konvergiert $x_j \to x$ für eine Teilfolge, und $x \in M,$ da M abgeschlossen ist. Dann folgt $f(x) = y$ und somit

$$\| x_j - x \| \geq \varepsilon$$

im Widerspruch zu $x_j \to x$.

///

Beispiel 4.3 (Quasilineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform II)

Wir betrachten die quasilineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform aus Beispiel 2.2. Dabei nehmen wir zusätzlich an, daß für jedes $\delta > 0$ ein $\varphi_\delta \in L^1(\Omega)$ existiert mit

$$\begin{aligned} |A(x, z, 0)| &\leq \varphi_\delta^{\frac{p-1}{p}}(x) + \delta |z|^{p-1}, \\ B(x, z, w)z &\geq -\varphi_\delta(x) - \delta(|z|^p + |w|^p). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Behauptung:
Dann ist der Differentialoperator $f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)^*$ aus Beispiel 2.2 mit

$$f(u).v := \int\limits_\Omega (A(., u, \nabla u)\nabla v + B(., u, \nabla u)v)$$

koerziv und eigentlich.
Beweis:
Mit (2.2) und (4.6) gilt

$$\begin{aligned} \langle f(u), u \rangle = \int\limits_\Omega (A(., u, \nabla u) - A(., u, 0))(\nabla u - 0) + \int\limits_\Omega (A(., u, 0)\nabla u + B(., u, \nabla u)u) \geq \\ \geq c_0 \| \nabla u \|^p_{L^p(\Omega)} - 2\delta \| \nabla u \|^p_{L^p(\Omega)} - 2\delta \| u \|^p_{L^p(\Omega)} - C_\delta. \end{aligned}$$

Also für δ klein und der Poincaré-Ungleichung

$$\langle f(u), u \rangle \geq c_1 \parallel u \parallel^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C \tag{4.7}$$

und daraus

$$\parallel f(u) \parallel_{W_0^{1,p}(\Omega)^*} \geq \tilde{c}_1 \parallel u \parallel^{p-1}_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C$$

falls $\parallel u \parallel_{W_0^{1,p}(\Omega)} \geq 1$. Damit ist f koerziv.

$W_0^{1,p}(\Omega)$ ist als abgeschlossener Unterraum von $L^p(\Omega)^{n+1}$ reflexiv, und wir verwenden Proposition 4.4 (ii) zum Beweis, daß f eigentlich ist.

Dazu konvergiere $u_j \to u$ schwach in $W_0^{1,p}(\Omega)$ und $f(u_j) \to \Lambda$ stark in $W_0^{1,p}(\Omega)^*$. Mit dem Satz von Rellich, Beispiel 4.1, können wir annehmen, daß $u_j \to u$ stark in $L^p(\Omega)$. Daraus folgt mit dem Konvergenzsatz von Vitali und der Wachstumsbedingung (2.1)

$$A(., u_j, \nabla u) \to A(., u, \nabla u) \quad \text{stark in } L^q(\Omega),$$
$$B(., u_j, \nabla u_j) \quad \text{ist beschränkt in } L^q(\Omega),$$

wobei $q = \frac{p}{p-1}$. Dann folgt mit (2.2), daß

$$\begin{aligned}
0 = \lim_{j\to\infty} \langle f(u_j) - f(u), u_j - u \rangle = \\
= \lim_{j\to\infty} \Bigg(\int_\Omega (A(., u_j, \nabla u_j) - A(., u_j, \nabla u))(\nabla u_j - \nabla u) + \\
+ \int_\Omega (A(., u_j, \nabla u) - A(., u, \nabla u))(\nabla u_j - \nabla u) + \\
+ \int_\Omega (B(., u_j, \nabla u_j) - B(., u, \nabla u))(u_j - u) \Bigg) \geq \\
\geq \limsup_{j\to\infty} \; c_0 \parallel \nabla u_j - \nabla u \parallel^p_{L^p(\Omega)},
\end{aligned}$$

also $u_j \to u$ stark in $W_0^{1,p}(\Omega)$, und f ist eigentlich.

///

5 Fredholm-Abbildungen

Definition 5.1 *X, Y seien Banachräume. Eine stetige, lineare Abbildung $T \in L(X,Y)$ heißt Fredholm-Abbildung, falls*

(i) $im\ T \subseteq Y$ ist abgeschlossen,

(ii) $ker\ T$ und $coker\ T := Y/im\ T$ sind endlich-dimensional.

Der Index einer Fredholm-Abbildung ist definiert durch

$$ind\ T := dim\ ker\ T - dim\ coker\ T.$$

□

Wir wollen Fredholm-Abbildungen durch ihre transponierte Abbildung $T^* : Y^* \to X^*$,

$$T^*\Lambda := \Lambda \circ T,$$

charakterisieren. Dazu stellen wir folgende Resultate der linearen Funktionalanalysis zusammen. Für $M \subseteq X$ und $N \subseteq X^*$ sind die Annulatoren definiert durch

$$M^\perp := \{\Lambda \in X^* \mid \Lambda x = 0 \text{ für alle } x \in M\ \} \subseteq X^*,$$
$$^\perp N := \{x \in X \mid \Lambda x = 0 \text{ für alle } \Lambda \in N\ \} \subseteq X.$$

Die Annulatoren sind abgeschlossene Unterräume, und $M^\perp$ ist sogar schwach$^*-$abgeschlossen.

Sukzessives bilden von Annulatoren ergibt

$$\begin{aligned} ^\perp(M^\perp) &= \overline{span(M)}, \\ (\ ^\perp N)^\perp &= \overline{span(N)}^*, \end{aligned} \tag{5.1}$$

wobei $\bar{\cdot}^*$ den Abschluß in der schwach$^*-$Topologie bezeichnet.

Für einen abgeschlossenen Unterraum $U \subseteq X$ gilt

$$\begin{aligned} U^* &\cong X^*/U^\perp, \\ (X/U)^* &\cong U^\perp. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Für einen schwach$^*-$abgeschlossen Unterraum $V \subseteq X^*$ setzen wir $U := \ ^\perp V$ und erhalten mit (5.1) $U^\perp = V$ und mit (5.2)

$$\begin{aligned} (\ ^\perp V)^* &\cong X^*/V, \\ (X/\ ^\perp V)^* &\cong V. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Die Beziehung zwischen Kern und Bild von T und T^* sind

$$\begin{aligned} ker\ T &= \ ^\perp im\ T^*, \\ ker\ T^* &= im(T)^\perp. \end{aligned} \tag{5.4}$$

$ker\ \ T$ und $ker\ \ T^*$ sind abgeschlossene Unterräume, und $ker\ \ T^*$ ist sogar schwach*−abgeschlossen. Für die Bilder gilt

$$
\begin{aligned}
& im\ T \text{ ist abgeschlossen,} \\
\iff \quad & im\ T^* \text{ ist abgeschlossen,} \\
\iff \quad & im\ T^* \text{ ist schwach}^*\text{−abgeschlossen.}
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

Damit können wir folgende Charakterisierung beweisen.

Proposition 5.1 *X, Y seien Banachräume und $T \in L(X, Y)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*

(i) T ist eine Fredholm-Abbildung.

(ii) T^* ist eine Fredholm-Abbildung.

(iii) $im\ T$ ist abgeschlossen und

$$ker\ T,\ ker\ T^* \quad \textit{sind endlich-dimensional.}$$

In allen Fällen gilt

$$
\begin{aligned}
ind\ T &= dim\ ker\ T - dim\ ker\ T^*, \\
ind\ T^* &= -ind\ T.
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

Beweis:
Mit (5.5) können wir zum Beweis der Äquivalenz der Aussagen annehmen, daß

$$
\begin{aligned}
& im\ T \text{ abgeschlossen ist,} \\
& im\ T^* \text{ schwach}^*\text{−abgeschlossen ist.}
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Im folgenden Dimensionsvergleich der auftretenden Vektor- bzw Banachräume setzen wir im Fall unendlich- dimensionaler Räume U die Dimension $dim\ U = \infty$. Mit dieser Konvention gilt für jeden Banachraum U , daß $dim\ U = dim\ U^*$.

Aus (5.7) folgt mit (5.2), (5.3) und (5.4), daß

$$dim\ ker\ T^* = dim\ im(T)^{\perp} = dim(Y/im\ T) = dim\ coker\ T, \tag{5.8}$$

und

$$dim\ ker\ T = dim\ {}^{\perp}im\ T^* = dim(X^*/im\ T^*) = dim\ coker\ T^*, \tag{5.9}$$

Aus (5.8) und (5.9) folgt die Äquivalenz und (5.6).

///

Fredholm-Abbildungen haben folgende kanonische Zerlegung.

Proposition 5.2 *X, Y seien Banachräume und $T \in L(X, Y)$ eine lineare Fredholm-Abbildung. Dann kann T faktorisiert werden durch*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"] & Y \\ X/ker\ T \arrow[r, "\tilde{T}", "\approx"'] & im\ T \arrow[u, hook, "i"'] \end{tikzcd}$$

Dabei ist π *eine Quotientenabbildung mit endlich-dimensionalem Kern,* $\tilde{T}$ *ein Isomorphismus und* i *eine Inklusion mit endlich-dimensionalem Cokern.*

Insbesondere sind $\pi, \tilde{T}$ *und* i *Fredholm-Abbildungen, und es gilt*

$$ind\ T = ind\ \pi + ind\ \tilde{T} + ind\ i.$$

Beweis:
Die Faktorisierung existiert mit stetigen, linearen Abbildungen $\pi, \tilde{T}$ und i . Weiter ist $\tilde{T}$ bijektiv, und, da $im\ T$ abgeschlossen ist, also ein Banachraum ist, ist $\tilde{T}$ ein Isomorphismus. Da $dim\ ker\ T,\ dim(Y/im\ T) < \infty$, sind $\pi, \tilde{T}$ und i Fredholm-Abbildungen.

Schließlich gilt

$$ind\ \pi + ind\ \tilde{T} + ind\ i = dim\ ker\ T + 0 - dim(Y/im\ T) = ind\ T.$$

///

Kompositionen von Fredholm-Abbildungen sind wieder Fredholm-Abbildungen.

Proposition 5.3 X, Y, Z *seien Banachräume, und* $T \in L(X, Y),\ S \in L(Y, Z)$ *seien Fredholm-Abbildungen.*

Dann ist $S \circ T \in L(X, Z)$ *wieder eine Fredholm-Abbildung, und es gilt*

$$ind\ S \circ T = ind\ S + ind\ T. \tag{5.10}$$

Beweis:
Wir faktorisieren T und S und müssen folgende Fälle betrachten.

(i) T oder S ist ein Isomorphismus.

(ii) $T = \pi$ ist eine Quotientenabbildung mit endlich-dimensionalem Kern.

(iii) $S = i$ ist eine Inklusion mit endlich-dimensionalem Cokern.

(iv) $S \circ T = \pi \circ i$ mit π und i wie in (ii) und (iii).

Im Fall (i) gilt die Aussage trivial.
Im Fall (ii) gilt $im\ S \circ \pi = im\ S$, und

$$p := \pi | ker\ S \circ \pi : ker\ S \circ \pi \to ker\ S$$

ist surjektiv mit $ker\ p = ker\ \pi$. Dies ergibt

$$dim\ ker\ S \circ \pi = dim\ ker\ \pi + dim\ ker\ S < \infty.$$

Im Fall (iii) gilt $ker\ i \circ T = ker\ T$ und

$$dim\ coker\ i \circ T = dim(Z/im\ T) =$$
$$dim(Z/Y) + dim(Y/im\ T) = dim\ coker\ i + dim\ coker\ T < \infty.$$

Schließlich betrachten wir (iv) mit

$$i : X \hookrightarrow Y,$$
$$\pi : Y \to Z = Y/W$$

mit abgeschlossenen Unterräumen $X, W \subseteq Y$ und

$$dim\ W,\ dim(Y/X) < \infty.$$

Es gilt

$$ker\ \pi \circ i = X \cap W,$$
$$im\ \pi \circ i = \pi(X) = (X + W)/W.$$

Da X abgeschlossen ist und W endlich-dimensional ist, ist auch $X + W$ abgeschlossen. Und da $X + W = \pi^{-1}((X + W)/W)$ und π eine Quotientenabbildung ist, so ist auch $(X + W)/W \subseteq Y/W$ abgeschlossen.

Weiter gilt

$$dim\ ker\ \pi \circ i \leq dim\ W < \infty,$$
$$dim\ coker\ \pi \circ i = dim(\tfrac{Y/W}{(X+W)/W}) = dim(Y/(X + W)) \leq dim(Y/X) < \infty.$$

Damit ist $\pi \circ i$ eine Fredholm-Abbildung.

Schließlich gilt mit elementarer linearer Algebra

$$ind\ \pi \circ i = dim\ ker\ \pi \circ i - dim\ coker\ \pi \circ i =$$
$$= dim\ X \cap W - dim(Y/(X + W)) = dim\ X \cap W - dim(\tfrac{Y/X}{(X+W)/X}) =$$
$$= dim\ X \cap W + dim((X + W)/X) - dim(Y/X) =$$
$$= dim\ W - dim(Y/X) = dim\ ker\ \pi - dim\ coker\ i =$$
$$= ind\ \pi + ind\ i.$$

///

Fredholm-Abbildungen bleiben unter gewissen Störungen Fredholm-Abbildungen mit gleichem Index.

Proposition 5.4 *X, Y seien Banachräume und $T \in L(X, Y)$ eine lineare Fredholm-Abbildung. $S \in L(X, Y)$ sei eine stetige, lineare Abbildung, die eine der folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) $\| S \| < \varepsilon$, wobei ε von T abhängt.

(ii) S *ist kompakt.*

Dann ist $T+S$ *wieder eine Fredholm-Abbildung, und es gilt*

$$ind(T+S) = ind\ T. \tag{5.11}$$

Im Fall (i) gilt weiter für ε *klein genug*

$$\begin{aligned} dim\ ker(T+S) &\leq dim\ ker\ T, \\ dim\ coker(T+S) &\leq dim\ coker\ T. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Beweis:

(i) Da $dim\ ker\ T$, $dim(Y/imT) < \infty$ und $im\ T$ abgeschlossen ist existieren abgeschlossene Unterräume $\tilde{X} \subseteq X$ und $\tilde{Y} \subseteq Y$ mit

$$\begin{aligned} X &= \tilde{X} \oplus ker\ T, \\ Y &= im\ T \oplus \tilde{Y}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

und es gilt

$$ind\ T = dim\ ker\ T - dim\ \tilde{Y}.$$

Es folgt, daß die Abbildung $\Phi : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to Y$ mit

$$\Phi(\tilde{x}, \tilde{y}) := T\tilde{x} + \tilde{y}$$

stetig und bijektiv ist, also ein Isomorphismus ist. Dann ist für $\varepsilon <\| \Phi^{-1} \|^{-1}$ die Abbildung $\tilde{\Phi} : \tilde{X} \times \tilde{Y} \to Y$ mit

$$\tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) := \Phi(\tilde{x}, \tilde{y}) + S\tilde{x} = (T+S)\tilde{x} + \tilde{y}$$

auch ein Isomorphismus.

Nun betrachten wir

$$S_0 := S|ker\ T : ker\ T \to Y$$

und $\Psi : X \times \tilde{Y} = (\tilde{X} \oplus ker\ T) \times \tilde{Y} \to Y$ mit

$$\begin{aligned} \Psi(x, \tilde{y}) = \Psi(\tilde{x} + k, \tilde{y}) &:= \\ = \tilde{\Phi}(\tilde{x}, \tilde{y}) + S_0 k &= (T+S)\tilde{x} + \tilde{y} + Sk = \\ &= (T+S)x + \tilde{y}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

wobei $x = \tilde{x} + k, \tilde{x} \in \tilde{X}, k \in ker\ T$. Ψ ist surjektiv, da $\tilde{\Phi}$ surjektiv ist, und es gilt

$$ker\ \Psi = \{(\tilde{x} + k, \tilde{y}) \mid k \in ker\ T, (\tilde{x}, \tilde{y}) = -\tilde{\Phi}^{-1} S_0 k\ \},$$

insbesondere

$$dim\ ker\ \Psi = dim\ ker\ T < \infty, \tag{5.15}$$

und Ψ ist eine Fredholm-Abbildung mit

$$ind\ \Psi = dim\ ker\ T. \tag{5.16}$$

Die Inklusion $i : X \hookrightarrow X \times \tilde{Y}$ ist auch eine Fredholm-Abbildung mit

$$ind\ i = -dim\ \tilde{Y} = -dim\ coker\ T. \tag{5.17}$$

Mit (5.14) erhalten wir

$$T + S = \Psi \circ i. \tag{5.18}$$

Mit Proposition 5.3 ist $T + S$ eine Fredholm-Abbildung und mit (5.10), (5.16) und (5.17) gilt weiter

$$ind(T + S) = ind\ \Psi + ind\ i = dim\ ker\ T - dim\ coker\ T = ind\ T,$$

also (5.11).

Aus (5.18) folgt $ker(T + S) \subseteq ker\ \Psi$ und mit (5.15) folgt

$$dim\ ker(T + S) \leq dim\ ker\ T.$$

Zusammen mit (5.11) ergibt dies (5.12).

//

(ii) Nun sei S kompakt. Zuerst zeigen wir, daß

$$im(T + S) \subseteq Y \quad \text{abgeschlossen ist.} \tag{5.19}$$

Dazu betrachten wir $x_j \in X$ mit

$$(T + S)x_j \to y. \tag{5.20}$$

Zunächst nehmen wir an, daß $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, und zeigen, daß für eine Teilfolge

$$x_j \quad \text{konvergiert in } X. \tag{5.21}$$

Da S kompakt ist, konvegiert $Sx_j \to \tilde{y}$ für eine Teilfolge und $Tx_j \to y - \tilde{y}$.

Wir zerlegen $x_j = \tilde{x}_j + k_j$ mit $\tilde{x}_j \in \tilde{X}$ und $k_j \in ker\ T$ und $X = \tilde{X} \oplus ker\ T$ wie in (5.13). Dann gilt

$$\| k_j \| \leq C \| x_j \|$$

und für eine Teilfolge konvergiert $k_j \to k$ als beschränkte Folge in dem endlich-dimensionalem Raum $ker\ T$.

Weiter ist $T|\tilde{X} : \tilde{X} \to im\ T$ ein Isomorphismus, da diese Abbildung stetig und bijektiv ist und $im\ T$ abgeschlossen ist. Also existiert ein $c_0 > 0$ mit

$$c_0 \| \tilde{x}_i - \tilde{x}_j \| \leq \| T\tilde{x}_i - T\tilde{x}_j \| = \| Tx_i - Tx_j \|,$$

und $(\tilde{x}_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge, also konvergent. Dies ergibt (5.21).

Wie kehren zu (5.20) zurück und wollen $y \in im(T+S)$ zeigen. Wir können o.B.d.A. annehmen

$$\| x_j \| \leq 2d(x_j, ker(T+S)) =: 2d_j.$$

Falls $d_j \to \infty$, so setzen wir $z_j := d_j^{-1} x_j$ und erhalten

$$\begin{aligned} \| z_j \| &\leq 2, \\ d(z_j, ker(T+S)) &= 1, \\ (T+S)z_j &\to 0. \end{aligned} \tag{5.22}$$

Mit (5.21) konvergiert $z_j \to z$ für eine Teilfolge. Daraus folgt $z \in ker(T+S)$ und

$$\| z_j - z \| \geq 1$$

im Widerspruch zu $z_j \to z$.

Damit ist d_j beschränkt und mit (5.21) konvergiert $x_j \to x$ für eine Teilfolge. Dies ergibt

$$y = (T+S)x \in im(T+S)$$

und (5.19) ist bewiesen.

Nun betrachten wir eine beschränkte Folge $x_j \in ker(T+S)$. Insbesondere ist $(T+S)x_j = 0$ konstant, also konvergent. Mit (5.21) konvergiert $x_j \to x \in ker(T+S)$ für eine Teilfolge. Dies besagt, daß die abgeschlossene Einheitskugel in $ker(T+S)$ kompakt ist, und somit ist $ker(T+S)$ endlich-dimensional.

Da S^* auch kompakt ist und T^* nach Proposition 5.1 eine Fredholm-Abbildung ist, erhalten wir aus dem eben Gezeigten

$$dim\ ker\ (T+S)^* < \infty,$$

und $T+S$ ist nach Proposition 5.1 eine Fredholm-Abbildung.

Insbesondere ist $T+tS$ für $t \in \mathbb{R}$ eine Fredholm-Abbildung, und nach (i) ist $(t \mapsto ind(T+tS))$ lokal konstant, also konstant. Dies ergibt (5.11) im Fall (ii).

///

Beispiel 5.1 (Lineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform II)
Wir betrachten die allgemeine lineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform aus Beispiel 2.4

$$Bu := -\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_j \partial_j u + du = \varphi + div\ \psi \quad \text{in } \Omega \tag{5.23}$$

für $u \in W_0^{1,2}(\Omega),\ \emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen. Dabei sind $a_{ij}, b_i, c_j, d \in L^\infty(\Omega), \varphi \in L^2(\Omega), \psi \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^n)$,

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2 \quad \text{für } x \in \Omega,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $c_0 > 0$.

Falls die Koeffizienten die Bedingung

$$\int_\Omega (b_i \partial_i v + dv) \geq 0 \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega) \text{ mit } v \geq 0 \tag{5.24}$$

erfüllen, so folgt mit dem schwachen Maximumprinzip, siehe [GT] Theorem 8.1, daß für $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$

$$-\partial_i(a_{ij}\partial_j u + b_i u) + c_j \partial_j u + du = 0 \Rightarrow u = 0. \tag{5.25}$$

Behauptung:
Ist (5.24) erfüllt, so hat (5.23) eine eindeutige Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, und der Differentialoperator $B : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)^*$ ist ein Isomorphismus.
Beweis:
Wir definieren die Abbildung $C : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)^*$ durch

$$C(u, v) := \int_\Omega uv.$$

Mit dem Satz von Rellich aus Beispiel 4.1 ist C eine kompakte, lineare Abbildung.

Aus der Garding-Ungleichung (2.9) folgt für $t \in \mathbb{R}$ groß genug, daß

$$\langle (B + tC)u, u\rangle \geq c_1 \parallel u \parallel^2_{W_0^{1,2}(\Omega)} \quad \text{für } u \in W_0^{1,2}(\Omega),$$

wobei $c_1 > 0$.

Dann folgt mit dem Satz von Lax-Milgram aus Beispiel 2.4, daß $B + tC : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)^*$ ein Isomorphismus ist, also insbesondere eine Fredholm-Abbildung mit Index 0 ist.

Da C kompakt ist, folgt mit Proposition 5.4 (ii), daß auch B eine Fredholm-Abbildung mit Index 0 ist. (5.25) besagt, daß B injektiv ist. Daraus folgt, daß B bijektiv ist, und somit ein Isomorphismus.

///

Definition 5.2 *X, Y seien Banachräume und $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen und zusammenhängend. Eine Abbildung $f \in C^1(U, Y)$ heißt (nichtlineare) Fredholm-Abbildung, falls $Df(x) \in L(X, Y)$ für alle $x \in U$ eine lineare Fredholm-Abbildung ist. Wir definieren den Index von f durch*

$$ind\ f := ind\ Df(x),$$

der mit Proposition 5.4 unabhängig von $x \in U$ ist, da U zusammenhängend ist.

□

Beispiel: Es sei $f, g \in C^1(U, Y)$, f eine Fredholm-Abbildung und g eine kompakte Abbildung. Dann ist $f + g$ mit Proposition 5.4 und den Übungsaufgaben wieder eine Fredholm-Abbildung mit $ind(f + g) = ind\ f$.

□

Folgende Zerlegung ist fundamental für Fredholm-Abbildungen.

Proposition 5.5 *X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$ sei offen und zusammenhängend und $f \in C^1(U, Y)$ eine Fredholm-Abbildung.*

Für jedes $x_0 \in U$ existiert eine Zerlegung

$$X = \tilde{X} \oplus K,$$
$$Y = Z \oplus \tilde{Y},$$

in abgeschlossenen Unterräume $\tilde{X}, K \subseteq X$ und $Z, \tilde{Y} \subseteq Y$ mit $K = ker\ Df(x_0)$, $\tilde{Y}$ endlich-dimensional und $Z = im\ Df(x_0)$, $x_0 = \tilde{x}_0 + k_0$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $k_0 \in K$ und offene, konvexe Umgebungen $U(\tilde{x}_0)$ von $\tilde{x}_0$ in $\tilde{X}$ und $U(k_0)$ von k_0 in K, mit $\overline{U(k_0)}$ kompakt, $U(x_0) = U(\tilde{x}_0) \times U(k_0)$,

$$\overline{U(x_0)} = \overline{U(\tilde{x}_0)} \times \overline{U(k_0)} \subseteq U,$$
$$f(.+k) : \overline{U(\tilde{x}_0)} \to f(\overline{U(\tilde{x}_0)} + k)$$

ist ein Homöomorphismus für $k \in \overline{U(k_0)}$,
die Abbildung $\Phi_x \in L(\tilde{X} \times \tilde{Y}, Y)$ mit

$$\Phi_x(\tilde{x}, \tilde{y}) := D_{\tilde{x}} f(x).\tilde{x} + \tilde{y},$$

und insbesondere

$$\pi_Z \circ D_{\tilde{x}} f(x) : \tilde{X} \to Z$$

mit der Projektion $\pi_Z : Y \to Z$, ist ein Isomorphismus für $x \in \overline{U(x_0)}$, und

$$\sup_{x \in \overline{U(x_0)}} \| Df(x) \| < \infty.$$

Beweis:
Für x_0 ist $T := Df(x_0)$ eine lineare Fredholm-Abbildung. Wir zerlegen

$$X = \tilde{X} \oplus K,$$
$$Y = Z \oplus \tilde{Y},$$

in abgeschlossenen Unterräume $\tilde{X}, K \subseteq X$ und $Z, \tilde{Y} \subseteq Y$ mit $K = ker\ T$, $\tilde{Y}$ endlich-dimensional und $Z = im\ T$ wie in (5.13).

Wir betrachten die Abbildung $F : U \times \tilde{Y} \to Y \times K$ mit

$$F(x, \tilde{y}) := (f(x) + \tilde{y}, P_K x),$$

wobei $P_K : X \to K$ die stetige Projektion von X auf K mit Kern $\tilde{X}$ ist.

Es gilt
$$DF(x_0, 0).(x, \tilde{y}) = (T.x + \tilde{y}, P_K x) = (T.\tilde{x} + \tilde{y}, k),$$
wobei $x = \tilde{x} + k$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $k \in K$. Dann ist $DF(x_0, 0) \in L(X \times \tilde{Y}, Y \times K)$ ein Isomorphismus. Es sei $x_0 = \tilde{x}_0 + k_0$, $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $k_0 \in K$ und $y_0 = f(x_0)$. Dann existieren nach dem Satz über inverse Funktionen, Satz 2.1, offene Umgebungen, so daß

$$F : V(\tilde{x}_0) \times V(k_0) \times V(0) \to V(y_0, k_0)$$

ein C^1-Diffeomorphismus mit Inversen

$$G := F^{-1} : V(y_0, k_0) \to V(\tilde{x}_0) \times V(k_0) \times V(0)$$

ist.

Wir wählen sukzessive offene, konvexe Umgebungen mit

$$\begin{aligned}
\overline{U(y_0, k_0)} &\subseteq V(y_0, k_0), \\
\overline{U(\tilde{x}_0)} &\subseteq V(\tilde{x}_0), \\
\overline{U(k_0)} &\subseteq V(k_0) \text{ kompakt}, \\
U(x_0) &= U(\tilde{x}_0) \times U(k_0),
\end{aligned}$$

und

$$F(\overline{U(\tilde{x}_0)} \times \overline{U(k_0)} \times \{0\}) \subseteq U(y_0, k_0).$$

Nun sei $k \in \overline{U(k_0)}$ und $\tilde{x}_j \in \overline{U(\tilde{x}_0)}$ mit

$$f(\tilde{x}_j + k) = y_j \to y.$$

Dann folgt $(y_j, k) \in U(y_0, k_0)$ und $(y, k) \in \overline{U(y_0, k_0)} \subseteq V(y_0, k_0)$. Weiter gilt

$$(\tilde{x}_j + k, 0) = G(y_j, k_0) \to G(y, k_0) =: (\tilde{x} + k, k_0),$$

also $\tilde{x}_j \to \tilde{x}$, $\tilde{x} \in \overline{U(\tilde{x}_0)} \subseteq V(\tilde{x}_0)$ und $f(\tilde{x} + k) = y$. Damit ist die Inverse von $f(. + k)|\overline{U(\tilde{x}_0)}$ stetig.

Aufgrund der Zerlegung von X, Y wissen bereits, daß

$$\Phi_{x_0}(\tilde{x}, \tilde{y}) = T.\tilde{x} + \tilde{y}$$

ein Isomorphismus ist. Wählen wir die Umgebungen genügend klein, so daß

$$\| \Phi_x - \Phi_{x_0} \| \leq \| Df(x) - Df(x_0) \| \leq \min(1, \| \Phi_{x_0}^{-1} \|^{-1}) \quad \text{für } x \in \overline{U(x_0)},$$

so ist auch Φ_x ein Isomorphismus und

$$\sup_{x \in \overline{U(x_0)}} \| Df(x) \| \leq \| Df(x_0) \| + 1 < \infty.$$

///

Wir wollen eine Verallgemeinerung von Smale des Satzes von Sard für nichtlineare Fredholm-Abbildungen beweisen. Dazu definieren wir.

Definition 5.3 *X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen. Für $f \in C^1(U, Y)$ heißt $x \in U$ regulärer Punkt, falls $Df(x) \in L(X, Y)$ surjektiv ist. Andernfalls heißt x singulärer Punkt.*

Die singulären Werte von f sind die Bilder der singulären Punkte, und die regulären Werte sind das Komplement der singulären Werte.

□

Proposition 5.6 *X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen und zusammenhängend und $f \in C^1(U, Y)$ eine Fredholm-Abbildung. Dann ist die Menge der singulären Punkte abgeschlossen in U .*

Beweis:
Die Menge der singulären Punkte ist

$$S := \{x \in U \mid dim\ coker\ Df(x) \geq 1\ \}.$$

Nach Proposition 5.4 (5.12) ist $(x \mapsto dim\ coker\ Df(x))$ oberhalbstetig und somit S abgeschlossen in U .

///

Bevor wir zum Satz von Smale kommen, brauchen wir noch folgende Proposition.

Proposition 5.7 *X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen und zusammenhängend und $f \in C^1(U, Y)$ eine Fredholm-Abbildung.*

Dann ist f lokal eigentlich, d.h zu jedem $x \in U$ existiert eine offene Umgebung mit $\overline{U(x)} \subseteq U$, so daß

$$f|\overline{U(x)} : \overline{U(x)} \to Y$$

eigentlich ist, also insbesondere abgeschlossen ist.

Beweis:
Wir betrachten die Zerlegung aus Proposition 5.5 für $x_0 \in U$. Nun sei $x_j = \tilde{x}_j + k_j \in \overline{U(x_0)}$ mit $f(x_j) = y_j \to y$. Da $\overline{U(k_0)}$ kompakt ist, konvergiert $k_j \to k \in \overline{U(k_0)}$ für eine Teilfolge. Da die Umgebungen konvex sind und $\parallel Df(x) \parallel \leq M$ für $x \in \overline{U(x_0)}$ und $M < \infty$ geeignet, sehen wir

$$\parallel f(\tilde{x}_j + k_j) - f(\tilde{x}_j + k) \parallel \leq M \parallel k_j - k \parallel \to 0,$$

also

$$f(\tilde{x}_j + k) \to y.$$

Da die Inverse von $f(. + k)$ stetig ist, konvergiert $\tilde{x}_j \to \tilde{x} \in \overline{U(\tilde{x}_0)}$, und schließlich $x_j = \tilde{x}_j + k_j \to \tilde{x} + k \in \overline{U(x_0)}$.

///

Nun kommen wir zum Satz von Smale.

Satz 5.1 (Satz von Smale 1965)
X, Y seien separable Banachräume, und $f \in C^l(X, Y)$ sei eine Fredholm-Abbildung mit

$$l > \max(ind\ f, 0). \tag{5.26}$$

Dann ist die Menge der singulären Werte von f von erster Kategorie in Y .

Beweis:
Für $x_0 \in X$ existiert mit Proposition 5.7 eine Umgebung $U(x_0)$, so daß

$$f|\overline{U(x_0)} : \overline{U(x_0)} \to Y$$

eigentlich, also auch abgeschlossen ist.

Durch Verkleinern können wir annhemen, daß die Zerlegung aus Proposition 5.5 in $U(x_0)$ gilt, d.h.

$$X = \tilde{X} \oplus K,$$
$$Y = Z \oplus \tilde{Y},$$

für abgeschlossene Unterräume $\tilde{X}, K \subseteq X$ und $Z, \tilde{Y} \subseteq Y$ mit $dim\ K, dim\ \tilde{Y} < \infty$ und

$$ind\ f = dim\ K - dim\ \tilde{Y}. \tag{5.27}$$

Weiter ist die Abbildung $\Phi_x \in L(\tilde{X} \times \tilde{Y}, Y)$ mit

$$\Phi_x(\tilde{x}, \tilde{y}) := D_{\tilde{x}} f(x).\tilde{x} + \tilde{y}, \tag{5.28}$$

und insbesondere

$$\pi_Z \circ D_{\tilde{x}} f(x) : \tilde{X} \to Z, \tag{5.29}$$

ein Isomorphismus für $x \in \overline{U(x_0)}$.

Mit Proposition 5.6 wissen wir, daß

$$S_{x_0} := f(\overline{U(x_0)} \cap \{ \text{ singulärer Punkte von } f \ \})$$

abgeschlossen ist.

Da Mengen von erster Kategorie die abzählbare Vereinigungen nirgensdichter Mengen sind, d.h. Mengen, deren Abschluß leeres Inneres hat, und X eine abzählbare Basis hat, genügt es zu zeigen, daß

$$int\ S_{x_0} = \emptyset. \tag{5.30}$$

Es sei $y_0 \in S_{x_0},\ y_0 = z_0 + \tilde{y}_0 \in Z \oplus \tilde{Y}$. Da $f|\overline{U(x_0)}$ eigentlich ist, ist

$$C := f^{-1}(y_0) \cap \overline{U(x_0)} \text{ kompakt.}$$

Wir betrachten $f_0 : \tilde{X} \oplus K \to Z,\ f_0 := \pi_Z \circ f$. Für $x_1 \in C,\ x_1 = \tilde{x}_1 + k_1 \in \tilde{X} \oplus K$ gilt $f(x_1) = y_0 = z_0 + \tilde{y}_0$, also

$$f_0(\tilde{x}_1, k_1) = z_0.$$

Mit (5.29) und dem impliziten Funktionensatz existiert eine C^l-Funktion $\tilde{x}_1 : U(k_1) \to U(\tilde{x}_1), \tilde{x}_1(k_1) = \tilde{x}_1$, und

$$f_0(\tilde{x}_1(k), k) = z_0.$$

Weiter sind dies die einzigen Lösungen der Gleichung $f_0(x) = z_0$ in einer Umgebung $U(x_1)$ von x_1. Da C kompakt ist, existiert eine endliche Überdeckung

$$C \subseteq \cup_{j=1}^m U(x_j)$$

mit $x_j \in C$ und Umgebungen $U(x_j)$ wie eben. Weiter existiert $\varepsilon > 0$ mit

$$U_\varepsilon(C) := \{x \in X \mid d(x, C) < \varepsilon \ \} \subseteq \cup_{j=1}^m U(x_j). \tag{5.31}$$

Da $f|\overline{U(x_0)}$ eigentlich ist, existiert mit Proposition 4.5 ein $\delta > 0$ mit

$$x \in \overline{U(x_0)}, \ \| f(x) - y_0 \| < \delta \Rightarrow x \in U_\varepsilon(C). \tag{5.32}$$

Nun definieren wir $g_j \in C^l(U(k_j), \tilde{Y})$ durch

$$g_j(k) := \pi_{\tilde{Y}} f(\tilde{x}_j(k), k),$$

also

$$f(\tilde{x}_j(k), k) = z_0 + g_j(k). \tag{5.33}$$

Mit (5.26) und (5.27) und dem Satz von Sard, ist die Menge der singulären Werte eines jeden g_j eine Nullmenge in $\tilde{Y}$. Also existiert ein regulärer Wert $\tilde{y}$ aller $g_j, j = 1, \ldots, m$, beliebig nahe an $\tilde{y}_0$, und $y := (z_0, \tilde{y})$ ist beliebig nahe an y_0 , insbesondere

$$\| y - y_0 \| < \delta. \tag{5.34}$$

Wir behaupten

$$y \notin S_{x_0}. \tag{5.35}$$

Daraus folgt (5.30) sofort.

Um (5.35) zu beweisen, müssen wir für $x \in \overline{U(x_0)}$ mit $f(x) = y$ zeigen, daß x ein regulärer Punkt von f ist, d.h.

$$Df(x) : X \to Y \text{ ist surjektiv.} \tag{5.36}$$

Mit (5.31), (5.32) und (5.34) folgt zuerst

$$x \in U(x_j) \quad \text{für ein } j \in \{1, \ldots, m\}.$$

Mit (5.28) existiert zu jedem $y' \in Y$ ein $\tilde{x}' \in \tilde{X}$ und $\tilde{y}' \in \tilde{Y}$ mit

$$Df(x).\tilde{x}' + \tilde{y}' = y'.$$

Da $f(x) = y = (z_0, \tilde{y})$, also $f_0(x) = z_0$, erhalten wir $x = (\tilde{x}_j(k), k)$ für ein $k \in U(k_j)$ und $g_j(k) = \tilde{y}$. Da $\tilde{y}$ ein regulärer Wert von g_j ist, folgt

$$Dg_j(k) : K \to \tilde{Y} \text{ ist surjektiv.}$$

Somit existiert $k' \in K$ mit

$$Dg_j(k).k' = \tilde{y}'.$$

Aus (5.33) folgt

$$Df(x).(\tilde{x}_j'(k).k' + k') = Dg_j(k).k' = \tilde{y}'.$$

Setzen wir $x' := \tilde{x}' + \tilde{x}_j'(k).k' + k' \in X$, so erhalten wir

$$Df(x).x' = Df(x).\tilde{x}' + Dg_j(k).k' = y'.$$

Also ist $Df(x)$ surjektiv und (5.36) ist bewiesen.

///

Folgende Proposition ergibt sich als Korollar.

Proposition 5.8 *X, Y seien separable Banachräume, und $f \in C^k(X,Y)$ sei eine Fredholm-Abbildung mit negativem Index. Dann ist $f(X)$ von erster Kategorie in Y .*

Beweis:
Für $x \in X$ gilt
$$\mathit{dim\ coker}\ Df(x) \geq -\mathit{ind}\ f > 0$$
und $Df(x)$ ist nicht surjektiv. Damit sind alle $x \in X$ singuläre Punkte von f , und $f(X)$ die Menge der singulären Werte. Mit dem Satz von Smale, Satz 5.1, ist diese von erster Kategorie.

///

Teil II
Lösen Nichtlinearer Gleichungen

6 Kontinuitätsmethode

Satz 6.1 *X, Y seien Banachräume und $L_t := (1-t)L_0 + tL_1 \in L(X,Y)$ mit*

$$\| x \| \leq C \| L_t x \| \quad \text{für } x \in X \tag{6.1}$$

mit $C < \infty$ unabhängig von $t \in [0,1]$.
Ist L_0 ein Isomorphismus, so ist auch L_1 ein Isomorphismus.

Beweis: Falls L_t für $t \in [0,1]$ ein Isomorphismus ist, so gilt mit (6.1)

$$\| L_t^{-1} \| \leq C.$$

Dann folgt für $\tilde{t} \in [0,1]$ mit

$$|t - \tilde{t}| \; \| L_1 - L_0 \| < C^{-1},$$

daß

$$\| L_t - L_{\tilde{t}} \| < \| L_t^{-1} \|^{-1},$$

also ist auch

$$L_{\tilde{t}} \text{ ein Isomorphismus.} \tag{6.2}$$

Wir wählen $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{1}{N} \| L_1 - L_0 \| < C^{-1}$$

und setzen $t_j := \frac{j}{N}, j = 1, \ldots, N$. Nach Voraussetzung ist $L_{t_0} = L_0$ ein Isomorphismus. Daraus folgt sukzessive mit (6.2), daß L_{t_j} und schließlich $L_{t_N} = L_1$ ein Isomorphismus ist.

///

Beispiel 6.1 (Lineare elliptische Differentialgleichung in Nichtdivergenzform)

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand und $0 < \alpha < 1$, $a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit

$$a_{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2,$$

$$\| a_{ij}, b_i, c \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \Lambda,$$

mit $c_0 > 0$ und $\Lambda < \infty$.

Aus der Regularitätstheorie elliptischer Differentialgleichungen, ist bekannt, daß für $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, das die lineare elliptische Differentialgleichung in Nichtdivergenzform mit Nullrandwerten

$$\begin{aligned} -a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu = \varphi \quad &\text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad &\text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{6.3}$$

und $\varphi \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ erfüllt, die folgenden Schauder-Abschätzungen

$$\| u \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega, \alpha, c_0, \Lambda)(\| \varphi \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \| u \|_{C^0(\Omega)}) \tag{6.4}$$

gelten, siehe [GT] Theorem 6.6.

Falls $c \geq 0$ folgt mit dem Maximumprinzip, siehe [GT] Theorem 3.3, für $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, daß

$$-a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu = 0 \text{ in } \Omega,\ u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \Longrightarrow u = 0. \tag{6.5}$$

Behauptung:
Für $c \geq 0$ hat (6.3) eine eindeutige Lösung in $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, und der Differentialoperator $\{u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\} \to C^{0,\alpha}(\Omega)$ ist ein Isomorphismus.
Beweis:
Wir setzen $C^{2,\alpha,0}(\Omega) := \{u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}$ und $L : C^{2,\alpha,0}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit

$$Lu := -a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu.$$

Es genügt zu zeigen, daß L ein Isomorphismus ist.

Zuerst zeigen wir, daß

$$\| u \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C(\Omega, \alpha, c_0, \Lambda) \| Lu \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \quad \text{für } u \in C^{2,\alpha,0}(\Omega) \tag{6.6}$$

falls $c \geq 0$.

Gilt dies nicht, so existieren Operatoren L_k mit Koeffizieten wie oben und $u_k \in C^{2,\alpha,0}(\Omega)$ mit $\| u_k \|_{C^0(\Omega)} = 1$ und

$$k \| L_k u_k \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \| u_k \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)}.$$

Dann folgt mit (6.4)

$$k \| L_k u_k \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq C \ (\| L_k u_k \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} + \| u_k \|_{C^0(\Omega)}),$$

also für $k > C$

$$\| L_k u_k \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \leq \frac{C}{k - C} \| u_k \|_{C^0(\Omega)} \leq \frac{C}{k - C},$$

und

$$L_k u_k \to 0 \quad \text{in } C^{0,\alpha}(\Omega).$$

Wieder folgt mit (6.4)

$$\| u_k \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq \tilde{C}.$$

Somit konvergiert für eine Teilfolge $u_k \to u$ stark in $C^2(\Omega)$ für $u \in C^{2,\alpha,0}(\Omega)$ und $u_k \to u$ stark in $C^0(\Omega)$, also $\| u \|_{C^0(\Omega)} = 1$. Weiter konvergieren die Koeffizienten von L_k stark in $C^0(\Omega)$ gegen Koeffizienten in $C^{0,\alpha}(\Omega)$ wie oben und somit $L_k \to L$. Daraus folgt $L_k u_k \to Lu$ stark in $C^0(\Omega)$, also $Lu = 0$.

Mit (6.5) folgt $u = 0$ im Widerspruch zu $\| u \|_{C^0(\Omega)} = 1$, und (6.6) ist bewiesen.

//

Nun betrachten wir den Laplace-Operator $L = -\Delta$, d.h. $a_{ij} = \delta_{ij}$, $b_i, c = 0$. Für $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega}) \subseteq L^2(\Omega)$ existiert nach Beispiel 2.4 ein eindeutiges $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit

$$-\Delta u = \varphi$$

im schwachen Sinne. Mit elliptischer Regularitätstheorie folgt wie in Beispiel 4.1, siehe [GT] Theorem 8.13, daß $u \in W^{l,2}(\Omega)$ für alle $l \in \mathbb{N}$ und mit Sobolev-Einbettungen, daß $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit $u = 0$ auf $\partial\Omega$. Insbesondere ist $u \in C^{2,\alpha,0}(\Omega)$ und $Lu = \varphi$.

Nun sei $\varphi \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Wir wählen eine Folge $\varphi_k \in C^\infty(\overline{\Omega})$ mit

$$\varphi_k \to \varphi \quad \text{stark in } C^{0,\alpha}(\Omega).$$

Dann sei $u_k \in C^{2,\alpha,0}(\Omega)$ mit $Lu_k = \varphi_k$ wie eben gezeigt. Aus (6.6) folgt

$$\| u_l - u_k \|_{C^{2,\alpha}(\Omega)} \leq C \| \varphi_l - \varphi_k \|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} \to 0$$

und $u_k \to u$ stark in $C^{2,\alpha}(\Omega)$. Somit ist $u \in C^{2,\alpha,0}(\Omega)$ und $Lu = \varphi$.

Wir haben gezeigt, daß $L = -\Delta$ surjektiv ist. Andererseits ist L mit (6.5) bzw. (6.6) für allgemeine Koeffizienten injektiv. Da L auch stetig ist, folgt , daß

$$-\Delta : C^{2,\alpha,0}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\Omega)$$

ein Isomorphismus ist.

Schließlich setzen wir für $t \in [0,1]$

$$a_{ij,t} := (1-t)\delta_{ij} + t a_{ij},$$
$$b_{i,t} := t b_i, \quad c_t := tc,$$

und

$$L_t u := -a_{ij,t}\partial_{ij} u + b_{i,t}\partial_i u + c_t u.$$

Dann erfüllt L_t (6.6) mit einer von t unabhängigen Konstanten. Da $L_0 = -\Delta$ wie bereits gezeigt ein Isomorphismus ist, folgt mit Satz 6.1, daß auch L ein Isomorphismus ist.

///

7 Der Brouwersche Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^n$

Wir beginnen mit der axiomatischen Definition des Brouwerschen Abbildungsgrades.

Definition 7.1 *Eine Abbildung*

$$(f, \Omega, y) \mapsto deg(f, \Omega, y) \in \mathbb{R}$$

mit

$$\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n \text{ offen, nichtleer,}$$
$$f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n),$$
$$y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega),$$

heißt Brouwerscher Abbildungsgrad im $\mathbb{R}^n$ *, falls* deg *folgende Axiome erfüllt:*

(i) *Normierung:*
Es gilt
$$deg(id, B_1(0), 0) = 1. \tag{7.1}$$

(ii) *Additivität:*
Für $\emptyset \neq \Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega,\ \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ *und*
$$y \in \mathbb{R}^n - f(\overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2))$$
gilt
$$deg(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^{2} deg(f, \Omega_i, y). \tag{7.2}$$

(iii) *Randbedingungen:*
Für $f = g$ *auf* $\partial\Omega$ *gilt*
$$deg(f, \Omega, y) = deg(g, \Omega, y). \tag{7.3}$$

(iv) *Translationsinvarianz:*
Es gilt
$$deg(f, \Omega, y) = deg(f - y, \Omega, 0). \tag{7.4}$$

□

Im folgenden nehmen wir an, daß deg der Brouwersche Abbilungsgrad gemäß Definition 7.1 ist. Am Ende dieses Paragraphen zeigen wir Existenz und Eindeutigkeit.

Die Additivität in Definition 7.1 kann für $\Omega_2 = \emptyset$ formuliert werden und ergibt die Ausschneidungseigenschaft.

Proposition 7.1 *Für* $\emptyset \neq \Omega_0 \subseteq \Omega$ *und*

$$y \in \mathbb{R}^n - f(\overline{\Omega} - \Omega_0)$$

gilt

$$deg(f, \Omega, y) = deg(f, \Omega_0, y). \tag{7.5}$$

Beweis:
Die Menge $K := f^{-1}(y) \subseteq \Omega_0$ ist kompakt. Wir wählen $x_0 \in \Omega_0 - K$ und $\varepsilon > 0$, so daß

$$B_\varepsilon(x_0),\ U_\varepsilon(K) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,K) < \varepsilon\ \} \subseteq \Omega_0,$$
$$B_\varepsilon(x_0) \cap U_\varepsilon(K) = \emptyset.$$

Dann folgt mit (7.2), daß

$$deg(f,\Omega,y) = deg(f,U_\varepsilon(K),y) + deg(f,B_\varepsilon(x_0),y) = deg(f,\Omega_0,y),$$

also (7.5).

///

Die Additivität in Definition 7.1 und Proposition 7.1 ergeben die Lösungseigenschaft.

Proposition 7.2
$$deg(f,\Omega,y) \neq 0 \Longrightarrow y \in f(\Omega). \tag{7.6}$$

Beweis:
Angenommen $y \notin f(\overline{\Omega})$. Dann wählen wir disjunkte Bälle

$$B_\varepsilon(x_1),\ B_\varepsilon(x_2) \subseteq \Omega$$

und erhalten mit (7.2) und (7.5) für $j = 1, 2$, daß

$$deg(f,B_\varepsilon(x_j),y) = deg(f,\Omega,y) = \sum_{i=1}^{2} deg(f,B_\varepsilon(x_i),y),$$

also

$$deg(f,\Omega,y) = 0.$$

///

Aus Definition 7.1 (iii) ergibt sich die Homotopieinvarianz.

Proposition 7.3 *Es sei*

$$f : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n \ \textit{stetig}, \quad f_t(x) := f(x,t)$$

und

$$y : [0,1] \to \mathbb{R}^n \ \textit{stetig}$$

mit

$$y(t) \in \mathbb{R}^n - f_t(\partial\Omega). \tag{7.7}$$

Dann ist

$$deg(f_t,\Omega,y(t))$$

unabhängig von $0 \leq t \leq 1$.

Beweis:
Mit (7.4) können wir $y(t) = 0$ für $0 \le t \le 1$ annehmen.

Da f stetig und $\partial\Omega \times [0,1]$ kompakt ist, existiert mit (7.7) ein $\varepsilon > 0$, so daß

$$|f_t(x)| \ge \varepsilon \quad \text{für } d(x, \partial\Omega) \le \varepsilon, \ 0 \le t \le 1.$$

Weiter existiert $\delta > 0$ mit

$$\| f_t - f_{\tilde{t}} \|_{C^0(\overline{\Omega})} \le \varepsilon/2 \quad \text{für } |t - \tilde{t}| \le \delta.$$

Die Proposition folgt, wenn wir für solche $t, \tilde{t}$ zeigen, daß

$$deg(f_t, \Omega, 0) = deg(f_{\tilde{t}}, \Omega, 0). \tag{7.8}$$

Wir wählen $\eta \in C_0^0(\Omega),\ 0 \le \eta \le 1,\ \eta \equiv 1$ auf $\Omega_\varepsilon := \Omega - \overline{U_\varepsilon(\partial\Omega)}$ und setzen

$$g := (1 - \eta) f_t + \eta f_{\tilde{t}}.$$

Auf $\overline{U_\varepsilon(\partial\Omega)}$ gilt

$$|g| \ge |f_t| - |\eta(f_t - f_{\tilde{t}})| \ge \varepsilon/2 > 0,$$

also

$$0 \in \mathbb{R}^n - g(\overline{U_\varepsilon(\partial\Omega)}).$$

Da weiter

$$g = f_t \quad \text{auf } \partial\Omega$$

und

$$g = f_{\tilde{t}} \quad \text{auf } \partial\Omega_\varepsilon,$$

folgt mit (7.3) und Proposition 7.1, daß

$$deg(f_t, \Omega, 0) = deg(g, \Omega, 0) = deg(g, \Omega_\varepsilon, 0) = deg(f_{\tilde{t}}, \Omega_\varepsilon, 0) = deg(f_{\tilde{t}}, \Omega, 0),$$

also (7.8).

///

Bemerkung:
Mit der Homotopieinvarianz erhalten wir für $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$deg(f(\,.+x_0), \Omega - x_0, y) = deg(f, \Omega, y).$$

□

In folgenden Spezialfällen kann der Abbildungsgrad durch die sogenannte Index- bzw. Determinatnenformel angegeben werden.

Proposition 7.4

(i) Indexformel:
Falls

$$\Omega \cap f^{-1}(y) \quad \textit{endlich ist,}$$

so gilt

$$deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} ind(f, x), \tag{7.9}$$

wobei

$$ind(f, x) := deg(f, U(x), f(x))$$

für eine offene Umgebung $U(x)$ *von* x *mit* $\overline{U(x)} \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$.

(ii) Für $f \in C^0(B_\varepsilon(x_0), \mathbb{R}^n)$ *differenzierbar in* x_0 *und*

$$Df(x_0) \ \textit{invertierbar}$$

gilt

$$ind(f, x_0) = sgn \ det \ Df(x_0). \tag{7.10}$$

(iii) Determinantenformel:
Für $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *und* $y \notin f(\partial\Omega)$ *ein regulärer Wert von* f *, d.h.*

$$Df(x) \ \textit{ist invertierbar für alle} \ x \in f^{-1}(y),$$

gilt

$$deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} sgn \ det \ Df(x). \tag{7.11}$$

Beweis:

(i) (7.9) und die Wohldefiniertheit von ind folgen direkt aus Proposition 7.1 und (7.2).

//

(ii) Mit der Translationsinvarianz in Definition 7.1 und der Homotopieinvarianz in Proposition 7.3 und der darauf folgenden Bemerkung können wir $x_0 = 0$, $f(0) = 0$ annehmen und setzen $T := Df(0)$. Zuerst zeigen wir

$$ind(f, 0) = ind(T, 0). \tag{7.12}$$

Dazu setzen wir

$$g_t(x) := (1 - t) f(x) + tTx$$

für $x \in B_\varepsilon(0)$ und $0 \le t \le 1$.

Da T invertierbar ist, existiert $c_0 > 0$ mit

$$|Tx| \ge c_0 |x|,$$

und, da $Df(0) = T$, gilt

$$|g_t(x)| \ge |Tx| - |f(x) - Tx| \ge c_0|x| - o(|x|),$$

also

$$g_t \neq 0 \quad \text{auf } \overline{B_\delta(0)} - \{0\}$$

für $0 < \delta \ll \varepsilon$ klein. Damit folgt aus Proposition 7.3, daß

$$ind(f,0) = deg(f, B_\delta(0), 0) = deg(T, B_\delta(0), 0) = ind(T,0),$$

also (7.12).

Es verbleibt zu zeigen, daß

$$ind(T,0) = sgn\ det\ T. \tag{7.13}$$

Wir zerlegen

$$T = UP,$$

wobei U orthogonal und P positiv definit und symmetrisch ist. In einer geeigneten Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ ist P diagonal

$$P = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad \lambda_i > 0,$$

und mit der Homotopie

$$P_t := (1-t)P + tI_n$$

können wir mit Proposition 7.3 o.B.d.A. $P = I_n$ annehmen, also $T = U$ orthogonal.

In einer geeigneten Orthonormalbasis hat T die blockdiagonale Darstellung

$$T = diag(D_{\varphi_1}, \ldots, D_{\varphi_k}, I_l, -I_m),$$

wobei

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\ \varphi & \sin\ \varphi \\ -\sin\ \varphi & \cos\ \varphi \end{pmatrix}$$

eine zweidimensionale Drehung um den Winkel φ ist. Weiter gilt

$$2k + l + m = n,$$
$$m \in \{0,1\}$$

und

$$det\ T = (-1)^m.$$

Mit der Homotopie

$$T_t = diag(D_{t\varphi_1}, \ldots, D_{t\varphi_k}, I_l, -I_m),$$

reduziert sich (7.13) schließlich auf die Fälle

$$T = I_n$$

und

$$T = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Für $T = I_n$ folgt aus (7.1), daß

$$ind(I_n, 0) = deg(I_n, B_1(0), 0) = 1,$$

also (7.13).

Im zweiten Fall schreiben wir $x = (y, z) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ und betrachten

$$\Omega_1 := \{(y, s) \mid |y| < 1, \ -1 < s < 1 \},$$
$$\Omega_2 := \{(y, s) \mid |y| < 1, \ 1 < s < 3 \},$$
$$\Omega := \{(y, s) \mid |y| < 1, \ -1 < s < 3 \}.$$

Wir setzen

$$g(y, s) := (y, -1 + |s - 1|)$$

und

$$h(y, s) := (y, s - 2),$$

also

$$g = T \quad \text{auf } \Omega_1$$

und

$$g = h \quad \text{auf } \Omega_2.$$

Mit Proposition 7.1 folgt

$$deg(g, \Omega, 0) = deg(T, \Omega_1, 0) + deg(h, \Omega_2, 0) = ind(T, 0) + deg(h, \Omega, 0). \tag{7.14}$$

Nun ergibt die Homotopie

$$\Phi(x, t) := (1 - t)g(x) + t(y, 1)$$

mit Proposition 7.3, daß

$$deg(g, \Omega, 0) = deg((y, s) \mapsto (y, 1), \Omega, 0) = 0, \tag{7.15}$$

mit Proposition 7.2, da $(y, 1) \neq 0$.

Weiter ergibt die Homotopie

$$\Psi(x, t) := h(x) + 2te_n$$

mit Proposition 7.3, daß

$$deg(h, \Omega, 0) = deg(id, \Omega, 0) = deg(id, B_1(0), 0) = 1, \tag{7.16}$$

mit Proposition 7.1 und (7.1).

Schließlich folgt (7.13) aus (7.14), (7.15) und (7.16).

//

(iii) (7.11) folgt sofort aus (7.9) und (7.10).

///

Kombinieren wir Proposition 7.4 (iii) mit dem Satz von Sard, so erhalten wir bereits die Eindeutigkeit des Abbildungsgrades.

Proposition 7.5 *Es gibt höchstens einen Abbildungsgrad, und dieser ist ganzzahlig.*

Beweis:
Es sei (f, Ω, y) wie in Definition 7.1. Also existiert ein $\varepsilon > 0$ mit

$$|f(x) - y| \geq \varepsilon \quad \text{für } x \in \partial\Omega.$$

Es existiert $\tilde{g} \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\| f - \tilde{g} \|_{C^0(\overline{\Omega})} \leq \varepsilon/2.$$

Weiter existiert mit dem Satz von Sard ein regulärer Wert $\tilde{y}$ von $\tilde{g}$ mit

$$|y - \tilde{y}| < \varepsilon/2.$$

Wir setzen $g := \tilde{g} - \tilde{y} + y$ und sehen

$$g \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n),$$
$$\| f - g \|_{C^0(\overline{\Omega})} < \varepsilon,$$
$$y \text{ ist ein regulärer Wert von } g.$$

Mit Proposition 7.3 ergibt die Homotopie

$$\Phi(x, t) := (1 - t) f(x) + t g(x),$$

daß für jeden Abbildungsgrad

$$deg(f, \Omega, y) = deg(g, \Omega, y),$$

also mit Proposition 7.4 (iii)

$$deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} sgn \; det \; Dg(x) \in \mathbb{Z}.$$

Also ist der Abbildungsgrad ganzzahlig, und es gibt höchstens einen.

///

Zum Beweis der Existenz des Abbildungsgrades schreiben wir (7.11) in Integralform.

Proposition 7.6 *Für* $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$, y *ein regulärer Wert von* f, $\varphi \in C_0^0(B_1(0))$, $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi = 1$ *und* $\varphi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varphi(\frac{x}{\varepsilon})$ *gilt*

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} sgn \; det \; Df(x) = \int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x) - y) det \; Df(x) \, \mathrm{d}x, \tag{7.17}$$

falls $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0(f, y)$.

Beweis:
Da $y \notin f(\partial\Omega)$ ein regulärer Wert von f ist, gilt

$$f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \Omega$$

und

$$Df(x_i) \text{ ist invertierbar.}$$

Für ε klein genug, existieren offene, disjunkte Umgebungen $U(x_i)$ der x_i, so daß

$$f|U(x_i) : U(x_i) \xrightarrow{\approx} B_\varepsilon(y)$$

ein C^1-Diffeomorphismus ist, und

$$f(\overline{\Omega} - \cup_{i=1}^m U(x_i)) \subseteq \mathbb{R}^n - B_\varepsilon(y).$$

Dann gilt mit der Substitutionsregel

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi_\varepsilon(f(x) - y) det\ Df(x)\ \mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^m sgn\ det\ Df(x_i) \int_{U(x_i)} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) |det\ Df(x)|\ \mathrm{d}x = \\ &= \sum_{i=1}^m sgn\ det\ Df(x_i) \int_{B_\varepsilon(0)} \varphi_\varepsilon = \sum_{i=1}^m sgn\ det\ Df(x_i). \end{aligned}$$

///

Wir verallgemeinern dies zur Gebietsintegralformel von Heinz.

Lemma 7.7 (Gebietsintegralformel von Heinz) *Es sei $f \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$ und U die Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$, in der y liegt.*
Dann gilt für jede $C^0 - n-$Differentialform ω mit

$$\begin{aligned} spt\ \omega &\subseteq U, \\ \int \omega &= 1, \end{aligned} \tag{7.18}$$

daß

$$deg(f, \Omega, y) = \int_\Omega f^\# \omega. \tag{7.19}$$

Beweis:
Zuerst wählen wir eine offene, zusammenhängende Menge V mit

$$\{y\},\ spt\ \omega \subseteq V \subset\subset U.$$

Dazu betrachten wir die kompakte Menge

$$K := \{y\},\ spt\ \omega \subseteq U.$$

Dann existiert eine endliche Überdeckung

$$K \subseteq \cup_{i=1}^m B_{\varrho_i}(x_i) \subset\subset U.$$

Da U zusammenhängend ist, existiert für $i = 2, \ldots, m$ jeweils eine Folge von Bällen $B_{i,j} \subset\subset U, j = 0, \ldots, m_i$, mit

$$B_{i,0} = B_{\varrho_{i-1}}(x_{i-1}) \quad , \quad B_{i,m_i} = B_{\varrho_i}(x_i)$$

und

$$B_{i,j-1} \cap B_{i,j} \neq \emptyset \quad j = 1, \ldots, m_i.$$

Fügt man diese Bälle o.B.d.A. den $B_{\varrho_i}(x_i)$ hinzu, so gilt o.B.d.A.

$$B_{\varrho_{i-1}}(x_{i-1}) \cap B_{\varrho_i}(x_i) \neq \emptyset$$

und

$$V := \cup_{i=1}^m B_{\varrho_i}(x_i) \subset\subset U$$

ist zusammenhängend und enthält K .

Nun wählen wir $f_i \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $\omega_i \in C_0^\infty(V, \Lambda^n \mathbb{R}^n)$, $\int \omega_i = 1$ und $y_i \in V$ mit

$$\begin{gathered} f_i \to f \quad \text{in } C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n), \\ \omega_i \to \omega \quad \text{in } C_0^0(V, \Lambda^n \mathbb{R}^n), \\ y_i \quad \text{ein regulärer Wert von } f_i, \\ y_i \to y. \end{gathered}$$

Es gilt

$$\int_\Omega f^\# \omega \leftarrow \int_\Omega f_i^\# \omega_i,$$

und mit Proposition 7.3 gilt für große i , daß

$$deg(f, \Omega, y) = deg(f_i, \Omega, y_i).$$

Da $V \subset\subset U \subseteq \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$, gilt weiter für großes i , daß

$$V \subseteq \mathbb{R}^n - f_i(\partial\Omega),$$

und somit ist $spt\ \omega_i \subseteq V$ in der Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n - f_i(\partial\Omega)$, in der $y_i \in V$ liegt, enthalten.

Also können wir f und ω als glatt annehmen und weiter, daß y ein regulärer Wert von f ist.

Nun folgt aus (7.11) und Proposition 7.6 für $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$, daß die glatte Differentialform

$$\omega = \varphi_\varepsilon(. - y)\ \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge\ \mathrm{d}x_n$$

(7.18) und (7.19) erfüllt.

Andererseits zeigt das nächste Lemma, daß für glattes f und ω die rechte Seite von (7.19) unabhängig von ω ist, das (7.18) erfüllt. Daraus folgt die Behauptung des Lemmas.

///

Lemma 7.8 *Es sei* $f \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$ *und* U *die Zusammenhangskomponente von* $\mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$ *, in der* y *liegt.*

Dann ist für jede $C^\infty - n-$*Differentialform* ω *mit*

$$spt\ \omega \subseteq U,$$

$$\int \omega = 1,$$

das Integral

$$\int_\Omega f^\# \omega \in \mathbb{Z}$$

ganzzahlig und unabhängig von ω *.*

Beweis:
Nach Proposition 7.6 ist das Integral für

$$\omega = \varphi_\varepsilon(. - y)\ \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge\ \mathrm{d}x_n$$

ganzzahlig, und es verbleibt die Unabhänigkeit von ω zu zeigen. Dazu müssen wir zeigen, daß

$$\int_\Omega f^\# \omega = 0$$

für

$$spt\ \omega \subseteq U,$$

$$\int \omega = 0.$$

Schreiben wir

$$\omega = \varphi\ \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge\ \mathrm{d}x_n$$

mit $\varphi \in C_0^\infty(U), \int \varphi = 0$, so folgt aus dem nächsten Lemma, daß $\psi \in C_0^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ mit

$$div\ \psi = \varphi$$

existiert. Setzen wir

$$\mu := \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \psi_i\ \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots\ \hat{\mathrm{d}x_i} \ldots \wedge\ \mathrm{d}x_n,$$

so folgt

$$\mathrm{d}\mu = \omega.$$

Dann ergibt der Satz von Stokes

$$\int_\Omega f^\# \omega = \int_\Omega f^\#(\ \mathrm{d}\mu) = \int_\Omega\ \mathrm{d}(f^\# \mu) = \int_{\partial\Omega} f^\# \mu = 0,$$

da $spt\ \mu \cap f(\partial\Omega) \subseteq U \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$.

///

Lemma 7.9 *Es sei* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *offen, zusammenhängend und* $\varphi \in C_0^\infty(U)$ *mit*

$$\int \varphi = 0.$$

Dann existiert $\psi \in C_0^\infty(U, \mathbb{R}^n)$ *mit*

$$div\ \psi = \varphi.$$

Beweis: Zuerst reduzieren wir das Lemma auf den Fall, wenn $spt\ \varphi$ in einem kleinen Ball enthalten ist. Es sei o.B.d.A. $0 \in U$. Weiter sei für ϱ beliebig klein

$$spt\ \varphi \subseteq \cup_{i=1}^m B_\varrho(x_i) \subset\subset U,$$
$$\gamma_i : [0,1] \to U \text{ glatt},$$
$$\gamma_i(0) = 0,\ \gamma_i(1) = x_i,$$
$$B_\varrho(\gamma_i(t)) \subset\subset U \quad \text{für } 0 \leq t \leq 1$$

und

$$\eta_i \in C_0^\infty(B_\varrho(x_i)),$$
$$0 \leq \eta_i \leq 1,$$
$$\sum_{i=1}^m \eta_i = 1 \quad \text{auf } spt\ \varphi$$

eine Partition der Eins auf $spt\ \varphi$.

Wir setzen

$$\varphi_t(x) := \sum_{i=1}^m (\eta_i \varphi)(x + x_i - \gamma_i(t)).$$

Es gilt $\varphi_1 = \varphi$ und

$$spt\ \varphi_t \subseteq \cup_{i=1}^m B_\varrho(\gamma_i(t)),$$

insbesondere

$$spt\ \varphi_0 \subseteq B_\varrho(0).$$

Weiter gilt

$$\partial_t \varphi_t = \sum_{i=1}^m \nabla(\eta_i \varphi)(x + x_i - \gamma_i(t))\gamma_i'(t) =$$
$$= div_x\Big(- \sum_{i=1}^m (\eta_i \varphi)(x + x_i - \gamma_i(t))\gamma_i'(t)\Big) = div\ \psi_t,$$

wobei

$$\psi_t(x) := -\sum_{i=1}^m (\eta_i \varphi)(x + x_i - \gamma_i(t))\gamma_i'(t).$$

Daraus folgt

$$\varphi_1 - \varphi_0 = div(\int_0^1 \psi_t),$$

insbesondere

$$\int \varphi_0 = 0,$$

und es genügt die Behauptung für φ_0 zu zeigen. Da

$$spt\ \varphi_0 \subseteq B_\varrho(0) \subset\subset U,$$

genügt es den Fall

$$U =]-1,1[^n$$

zu betrachten.

Dies beweisen wir per Induktion nach n . Für $n = 1$ setzen wir

$$\psi(x) := \int_{-\infty}^{x} \varphi$$

und erhalten $\psi \in C_0^\infty(]-1,1[)$ und $\psi' = \varphi$.

Für $n \geq 2$ schreiben wir $x = (y,t) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. Wir definieren

$$\tilde{\varphi}(y) := \int_{\mathbb{R}} \varphi(y,t)\ \mathrm{d}t.$$

Es gilt $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty(]-1,1[^{n-1})$ und $\int \tilde{\varphi} = 0$. Damit folgt durch Induktion, daß $\tilde{\psi} \in C_0^\infty(]-1,1[^{n-1}, \mathbb{R}^{n-1})$ existiert mit

$$div\ \tilde{\psi} = \tilde{\varphi}.$$

Wir wählen $\chi \in C_0^\infty(]-1,1[)$ mit $\int_{\mathbb{R}} \chi = 1$ und setzen

$$\lambda(y,t) := \int_{-\infty}^{t} (\varphi(y,s) - \tilde{\varphi}(y)\chi(s))\ \mathrm{d}s.$$

Gemäß der Definition von $\tilde{\varphi}$ und $\int_{\mathbb{R}} \chi = 1$ folgt $\lambda \in C_0^\infty(]-1,1[^n)$ und weiter gilt

$$\partial_t \lambda(y,t) = \varphi(y,t) - \tilde{\varphi}(y)\chi(t).$$

Schließlich setzen wir

$$\psi(y,t) := (\tilde{\psi}(y)\chi(t), \lambda(y,t))$$

und sehen

$$div\ \psi = \chi\ div\ \tilde{\psi} + \partial_t \lambda = \chi\tilde{\varphi} + \varphi - \tilde{\varphi}\chi = \varphi.$$

///

Wir verwenden die Gebietsintegralformel von Heinz zur Definition des Abbilungsgrades und zeigen damit die Existenz des Abbildungsgrades.

Definition 7.2 *Es sei* $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen. Für* $f \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *und* $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$ *definieren wir*

$$deg(f,\Omega,y) := \int_{\Omega} f^{\#}\omega, \tag{7.20}$$

wobei ω *eine* $C^\infty - n-$*Differentialform mit* $\int \omega = 1$ *und Träger in der Zusammenhangskomponente* U *von* $\mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$ *, in der* y *liegt.*

Für $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *und* $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$ *definieren wir*

$$deg(f, \Omega, y) := \lim_{i\to\infty} deg(f_i, \Omega, y) \tag{7.21}$$

für eine Folge $f_i \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *mit* $y \in \mathbb{R}^n - f_i(\partial\Omega)$ *und*

$$\| f_i - f \|_{C^0(\overline{\Omega})} \to 0.$$

□

Zunächst bemerken wir, daß *deg* für glattes f mit Lemma 7.8 durch (7.20) wohldefiniert ist. Der nächste Satz besagt, daß durch (7.21) der Abbildungsgrad definiert ist.

Satz 7.1 *Die Funktion deg aus Definition 7.2 ist wohldefiniert und erfüllt die Axiome von Definition 7.1. Damit ist deg der gemäß Proposition 7.5 eindeutige Abbildungsgrad.*

□

Zum Beweis dieses Satzes ist folgendes Lemma fundamental.

Lemma 7.10 *Für* $f_0, f_1 \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *mit*

$$\| f_0 - f_1 \|_{C^0(\partial\Omega)} < d(y, f_1(\partial(\Omega))) \tag{7.22}$$

gilt

$$deg(f_0, \Omega, y) = \deg(f_1, \Omega, y), \tag{7.23}$$

wobei deg aus Definition 7.2 (7.20) ist.

Beweis:
Wir setzen

$$f_t := (1-t)f_0 + tf_1 \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n).$$

Aus (7.22) folgt für $x \in \partial\Omega$, daß

$$|f_t(x) - y| \geq |f_1(x) - y| - |f_1(x) - f_0(x)| \geq d(y, f_1(\partial\Omega)) - \| f_0 - f_1 \|_{C^0(\partial\Omega)} =: \varepsilon > 0.$$

Damit ist $B_\varepsilon(y)$ in der Zusammenhangskomponente von $\mathbb{R}^n - f_t(\partial\Omega)$, in der y liegt, enthalten. Wir wählen $\omega \in C_0^\infty(B_\varepsilon(y), \Lambda^n\mathbb{R}^n)$ mit $\int \omega = 1$ und erhalten mit (7.20)

$$deg(f_t, \Omega, y) = \int_\Omega f_t^\# \omega.$$

Dies ändert sich stetig in $t \in [0,1]$ und ist ganzzahlig nach Lemma 7.8, also konstant. Dies ergibt (7.23).

///

Beweis von Satz 7.1: Zuerst zeigen wir, daß *deg* aus Definition 7.2 wohldefiniert ist. Für $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ existiert $f_i \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\| f_i - f \|_{C^0(\overline{\Omega})} \to 0.$$

Für $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$ folgt

$$d(y, f_i(\partial\Omega)) \to d(y, f(\partial\Omega)) > 0,$$

insbesondere $y \in \mathbb{R}^n - f_i(\partial\Omega)$ für große i . Weiter gilt für große i, j , daß

$$\| f_i - f_j \|_{C^0(\partial\Omega)} < d(y, f_i(\partial\Omega)).$$

Somit ist $deg(f_i, \Omega, y)$ konstant für große i , insbesondere konvergent. Damit existiert der Limes in (7.21).

Weiter ist der Limes eindeutig, denn sei $f'_i \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\| f'_i - f \|_{C^0(\overline{\Omega})} \to 0,$$

so betrachten wir die gemischte Folge

$$g_i := \begin{cases} f_{i/2} & i \text{ gerade,} \\ f'_{(i-1)/2} & i \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Daraus folgt $\| g_i - f \|_{C^0(\overline{\Omega})} \to 0$ und der Limes $\lim\limits_{i\to\infty} deg(g_i, \Omega, y)$ existiert wie oben gezeigt. Dies ergibt

$$\lim_{i\to\infty} deg(f_i, \Omega, y) = \lim_{i\to\infty} deg(g_i, \Omega, y) = \lim_{i\to\infty} deg(f'_i, \Omega, y),$$

also die Eindeutigkeit des Limes in (7.21), und deg ist wohldefiniert.

Für $f \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ kann die konstante Folge $f_i := f$ gewählt werden, und somit ist *deg* in (7.21) eine Erweiterung von (7.20).

Schließlich verifizieren wir die Axiome aus Definition 7.1.

(i) Für $\omega = \varphi \, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$, $\varphi \in C_0^\infty(B_1(0))$, $\int \varphi = 1$, folgt mit (7.20) , daß

$$deg(id, B_1(0), 0) = \int\limits_{B_1(0)} id^\# \omega = 1,$$

also (7.1).

//

(ii) Es sei $\emptyset \neq \Omega_1, \Omega_2 \subseteq \Omega$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ und

$$y \in \mathbb{R}^n - f(\overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2)) \subseteq \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega),\ \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega_i). \tag{7.24}$$

Zuerst sei $f \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. V bzw. U, U_i seien die Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^n - f(\overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ bzw. $\mathbb{R}^n - f(\partial\Omega)$, $\mathbb{R}^n - f(\partial\Omega_i)$ in der y liegt.

Es gilt

$$V \subseteq U, U_1, U_2.$$

Wir wählen $\omega \in C_0^\infty(V, \Lambda^n \mathbb{R}^n)$ mit $\int \omega = 1$. Da

$$f^\# \omega = 0 \quad \text{auf } \overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2),$$

folgt mit (7.20), daß

$$deg(f, \Omega, y) = \int_\Omega f^\# \omega = \sum_{i=1}^{2} \int_{\Omega_i} f^\# \omega = \sum_{i=1}^{2} deg(f, \Omega_i, y),$$

also (7.2).

Nun sei $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und $f_j \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit $\| f_j - f \|_{C^0(\overline{\Omega})} \to 0$. Aus (7.24) folgt für großes j , daß

$$y \in \mathbb{R}^n - f_j(\overline{\Omega} - (\Omega_1 \cup \Omega_2)).$$

Dies ergibt mit (7.21), daß

$$deg(f, \Omega, y) = \lim_{j \to \infty} deg(f_j, \Omega, y) = \lim_{j \to \infty} \sum_{i=1}^{2} deg(f_j, \Omega_i, y) = \sum_{i=1}^{2} deg(f, \Omega_i, y),$$

also (7.2).

//

(iii) Nun sei $f, g \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit

$$f = g \quad \text{auf } \partial\Omega$$

und $y \in \mathbb{R}^n - f(\partial\Omega) = \mathbb{R}^n - g(\partial\Omega)$. Wir wählen $f_i, g_i \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\| f_i - f \|_{C^0(\overline{\Omega})} \to 0 \quad , \quad \| g_i - g \|_{C^0(\overline{\Omega})} \to 0.$$

Daraus folgt

$$\| f_i - g_i \|_{C^0(\partial\Omega)} \to \| f - g \|_{C^0(\partial\Omega)} = 0,$$
$$d(y, f_i(\partial\Omega)) \to d(y, f(\partial\Omega)) > 0,$$

also für große i , daß

$$\| f_i - g_i \|_{C^0(\partial\Omega)} < d(y, f_i(\partial\Omega)).$$

Dann folgt mit dem Lemma 7.10, daß

$$deg(f_i, \Omega, y) = deg(g_i, \Omega, y)$$

und mit (7.21)

$$deg(f, \Omega, y) = deg(g, \Omega, y)$$

also (7.3).

//

(iv) Da für glattes f, ω die Identität

$$f^{\#}\omega = (f-y)^{\#}\omega(.+y)$$

und

$$spt\ \omega(.+y) = (spt\ \omega) - y$$

gilt, folgt

$$deg(f, \Omega, y) = deg(f-y, \Omega, 0).$$

Mit (7.21) überträgt sich dies auf nicht glattes f.

///

8 Fixpunktsätze

In diesem Paragraphen werden die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder und einige Varianten bewiesen.

Lemma 8.1 *Es sei* $f \in C^0(\overline{B_1(0)}, \mathbb{R}^n)$ *mit*

$$\langle f(x), x\rangle \geq 0 \quad \textit{für alle } x \in \partial B_1(0).$$

Dann hat f *eine Nullstelle.*

Beweis:
Angenommen, f habe keine Nullstelle. Wir definieren

$$f_t(x) := (1-t)f(x) + tx$$

und sehen für $x \in \partial B_1(0)$, daß

$$\langle f_t(x), x\rangle = (1-t)\langle f(x), x\rangle + t|x|^2 \geq t.$$

Insbesondere

$$f_t \neq 0 \quad \text{auf } \partial B_1(0)$$

für $0 < t \leq 1$, und nach Annahme an f gilt dies auch für $t = 0$.

Aus Proposition 7.3 und (7.1) folgt

$$deg(f, B_1(0), 0) = deg(id, B_1(0), 0) = 1,$$

und schließlich mit Proposition 7.2

$$0 \in f(B_1(0)),$$

und f hat eine Nullstelle.

///

Eine einfache Konsequenz ist, daß $\partial B_1(0)$ kein Retrakt von $\overline{B_1(0)}$ ist. Genauer gilt:

Proposition 8.2 *Es gibt keine stetige Abbildung*

$$f : \overline{B_1(0)} \to \partial B_1(0)$$

mit

$$f|\partial B_1(0) = id_{\partial B_1(0)}.$$

□

Damit können wir den Fixpunktsatz von Brouwer beweisen.

Satz 8.1 (Fixpunktsatz von Brouwer)
Jede stetige Selbstabbildung

$$f : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$$

hat mindestens einen Fixpunkt.

Beweis:
Wir betrachten $g : \overline{B_1(0)} \to \mathbb{R}^n$ mit

$$g(x) := x - f(x).$$

Für $x \in \partial B_1(0)$ gilt

$$\langle g(x), x \rangle = |x|^2 - \langle f(x), x \rangle \geq 1 - |f(x)| \geq 0.$$

Also hat g mit Lemma 8.1 eine Nullstelle und somit f einen Fixpunkt.

///

Korollar 8.2 *Es sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe, kompakte Teilmenge und f eine stetige Selbstabbildung*

$$f : K \to K.$$

Dann hat f mindestens einen Fixpunkt.

Beweis:
Wir betrachten die stetige Projektion

$$P : \mathbb{R}^n \to K,$$

die jedem Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ den eindeutig nächsten Punkt in K zuordnet, d.h.

$$|x - P(x)| = d(x, K) \quad , \quad P(x) \in K.$$

Wir wählen $R > 0$ mit $K \subseteq B_R(0)$ und definieren

$$g := f \circ P : \overline{B_R(0)} \to K \subseteq \overline{B_R(0)}.$$

Nach dem Fixpunktsatz von Brouwer, Satz 8.1, hat g einen Fixpunkt $x \in \overline{B_R(0)}$, d.h.

$$x = g(x) = f(P(x)) \in K.$$

Dies ergibt

$$P(x) = x$$

und somit

$$f(x) = x,$$

also ein Fixpunkt von f .

///

Die Verallgemeinerung für Banachräume ist der Fixpunktsatz von Schauder.

Satz 8.3 (Fixpunktsatz von Schauder)
X sei ein Banachraum, $\emptyset \neq C \subseteq X$ abgeschlossen und konvex. Weiter sei f eine stetige Selbstabbildung

$$f : C \to C$$

und

$$f(C) \quad \textit{ist relativ kompakt.}$$

Dann hat f mindestens einen Fixpunkt.

Beweis:
Nach Voraussetzung ist

$$K := \overline{f(C)} \subseteq C$$

kompakt. Für $\varepsilon > 0$ existiert eine endliche Überdeckung

$$K \subseteq \cup_{i=1}^m B_\varepsilon(x_i)$$

mit $x_i \in C$. Wir definieren $\varphi_\varepsilon^i : K \to [0,1]$ durch

$$\varphi_\varepsilon^i(x) := \frac{d(x, X - B_\varepsilon(x_i))}{\sum\limits_{j=1}^m d(x, X - B_\varepsilon(x_j))}.$$

Es gilt

$$\sum_{i=1}^m \varphi_\varepsilon^i = 1 \quad \text{auf } K.$$

Wir definieren

$$P_\varepsilon : K \to C_\varepsilon := convex\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq C$$

durch

$$P_\varepsilon(x) := \sum_{i=1}^m \varphi_\varepsilon^i(x) x_i.$$

Für $x \in K$ gilt

$$\| P_\varepsilon(x) - x \| \leq \sum_{i=1}^m \varphi_\varepsilon^i(x) \| x_i - x \| \leq \varepsilon, \tag{8.1}$$

da $\varphi_\varepsilon^i(x) = 0$ für $\| x_i - x \| \geq \varepsilon$.

Nun betrachten wir

$$f_\varepsilon := P_\varepsilon \circ f|C_\varepsilon : C_\varepsilon \to C_\varepsilon.$$

Da $\emptyset \neq C_\varepsilon \subseteq span(\{x_1, \ldots, x_m\})$ konvex und kompakt ist, hat f_ε nach Korollar 8.2 mindestens einen Fixpunkt $x_\varepsilon \in C_\varepsilon$, d.h.

$$P_\varepsilon(f(x_\varepsilon)) = x_\varepsilon.$$

Da $f(x_\varepsilon) \in K$, existiert eine Teilfolge $\varepsilon_i \downarrow 0$ mit

$$f(x_{\varepsilon_i}) \to \bar{x} \in K \subseteq C.$$

Aus (8.1) folgt

$$\| f(x_{\varepsilon_i}) - x_{\varepsilon_i} \| = \| f(x_{\varepsilon_i}) - P_{\varepsilon_i}(f(x_{\varepsilon_i})) \| \leq \varepsilon_i,$$

also

$$x_{\varepsilon_i} \to \bar{x},$$

und, da f stetig ist,

$$f(\bar{x}) = \bar{x}.$$

///

Korollar 8.4 *X sei ein Banachraum, und*

$$f : \overline{B_1(0)} \to X \text{ ist stetig,}$$
$$f(\overline{B_1(0)}) \text{ ist relativ kompakt,}$$
$$f(\partial B_1(0)) \subseteq \overline{B_1(0)}.$$

Dann hat f mindestens einen Fixpunkt.

Beweis:
Es sei $g : \overline{B_1(0)} \to X$ mit

$$g(x) := \begin{cases} f(x) & \text{für } \| f(x) \| \leq 1 , \\ \frac{f(x)}{\|f(x)\|} & \text{für } \| f(x) \| \geq 1 . \end{cases}$$

g ist eine stetige Selbstabbildung

$$g : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$$

und $g(\overline{B_1(0)})$ ist relativ kompakt, da $f(\overline{B_1(0)})$ relativ kompakt ist .

Nach dem Fixpunktsatz von Schauder, Satz 8.3, hat g eine Fixpunkt $x \in \overline{B_1(0)}$, d.h.

$$g(x) = x.$$

Falls $\| f(x) \| \leq 1$, so folgt

$$x = g(x) = f(x),$$

und x ist ein Fixpunkt von f .
Falls $\| f(x) \| > 1$, so folgt

$$\| x \| = \| g(x) \| = \| \frac{f(x)}{\| f(x) \|} \| = 1,$$

also $x \in \partial B_1(0)$ und nach Annahme

$$f(x) \in \overline{B_1(0)},$$

im Widerspruch zu $\| f(x) \| > 1$.

///

Die folgende Verallgemeinerung kann als nichtlineare Version der Kontinuitätsmethode angesehen werden.

Satz 8.5 (Fixpunktsatz von Leray - Schauder)
X sei ein Banachraum, und

$$f : X \times [0,1] \to X, \quad f_t(x) = f(x,t)$$

eine kompakte Abbildung mit

$$f_0 = 0.$$

Weiter existiere $\Lambda < \infty$, so daß

$$f(x,t) = x \Longrightarrow \| x \| < \Lambda. \tag{8.2}$$

Dann hat f_1 mindestens einen Fixpunkt.

Beweis:
Wir können $\Lambda = 1$ annehmen und definieren für $0 < \varepsilon < 1$ die Abbildung $g_\varepsilon : \overline{B_1(0)} \to X$ durch

$$g_\varepsilon(x) := \begin{cases} f\Big(\dfrac{x}{\| x \|}, \dfrac{1- \| x \|}{\varepsilon}\Big) & \text{für } 1-\varepsilon \leq \| x \| \leq 1 \ , \\ f\Big(\dfrac{x}{1-\varepsilon}, 1\Big) & \text{für } \| x \| \leq 1-\varepsilon \ . \end{cases}$$

g_ε ist stetig, $g(\overline{B_1(0)})$ ist relativ kompakt, da f eine kompakte Abbildung ist, und für $x \in \partial B_1(0)$ gilt

$$g_\varepsilon(x) = f(x, 0) = 0,$$

also

$$g_\varepsilon(\partial B_1(0)) \subseteq B_1(0).$$

Mit Korollar 8.4 hat g_ε einen Fixpunkt $x_\varepsilon \in \overline{B_1(0)}$, d.h.

$$g_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon.$$

Setzen wir

$$(y_\varepsilon, t_\varepsilon) := \begin{cases} \Big(\dfrac{x_\varepsilon}{\| x_\varepsilon \|}, \dfrac{1- \| x_\varepsilon \|}{\varepsilon}\Big) & \text{falls } 1-\varepsilon \leq \| x_\varepsilon \| \leq 1 \ , \\ \Big(\dfrac{x_\varepsilon}{1-\varepsilon}, 1\Big) & \text{falls } \| x_\varepsilon \| \leq 1-\varepsilon \ , \end{cases}$$

so gilt

$$f(y_\varepsilon, t_\varepsilon) = x_\varepsilon.$$

Weiter gilt

$$\| x_\varepsilon - y_\varepsilon \| \leq \varepsilon \| y_\varepsilon \| \leq 2\varepsilon, \tag{8.3}$$

da $\| y_\varepsilon \| \leq 2 \| x_\varepsilon \| \leq 2$ für $\varepsilon < 1/2$.

Da f kompakt ist, können wir eine Teilfolge $\varepsilon_i \downarrow 0$ wählen mit

$$(x_{\varepsilon_i}, t_{\varepsilon_i}) \to (x, t).$$

Mit (8.3) folgt $(y_{\varepsilon_i}, t_{\varepsilon_i}) \to (x, t)$ und $f(x,t) = x$, da f stetig ist.

Daraus folgt mit (8.2), daß

$$\| x \| < 1.$$

und

$$\| x_{\varepsilon_i} \| \to \| x \| < 1 \leftarrow 1 - \varepsilon_i,$$

also

$$\| x_{\varepsilon_i} \| < 1 - \varepsilon_i$$

für großes i . Dies ergibt $t_{\varepsilon_i} = 1 = t$ und

$$f_1(x) = x,$$

also ist x ein Fixpunkt von f_1 .

///

Beispiel 8.1 (Quasilineare elliptische Differentialgleichung in Nichtdivergenzform II)

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen mit glattem Rand und $a_{ij}, b \in C^{0,\alpha}_{loc}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$, $i,j = 1,\dots,n$, $0 < \alpha < 1$, mit

$$a_{ij}(x,z,w)\xi_i\xi_j > 0$$

für $(x,z,w) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und $\xi \in \mathbb{R}^n - \{0\}$.

Weiter nehmen wir an, daß $\beta > 0, \Lambda < \infty$ existieren, so daß jede Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ der quasilinearen elliptischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -a_{ij}(.,u,\nabla u)\partial_{ij}u + tb(.,u,\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{8.4}$$

mit $t \in [0,1]$ die apriori-Abschätzung

$$\| u \|_{C^{1,\beta}(\Omega)} < \Lambda \tag{8.5}$$

erfüllt.

Behauptung:
Dann existiert eine Lösung $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ von (8.4) für $t = 1$.
Beweis:
Für $v \in C^{1,\beta}(\Omega)$ gilt $a_{ij}(.,v,\nabla v)$, $b(.,v,\nabla v) \in C^{0,\alpha\beta}(\Omega)$ und mit Beispiel 6.1 existiert eine eindeutige Lösung $u =: f(v) \in C^{2,\alpha\beta,0}(\Omega)$ der linearen elliptischen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} -a_{ij}(.,v,\nabla v)\partial_{ij}u + b(.,v,\nabla v) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Weiter gilt die Abschätzung

$$\| v \|_{C^{1,\beta}(\Omega)} \leq M \Rightarrow \| u \|_{C^{2,\alpha\beta}(\Omega)} \leq C(M),$$

wobei $C(M)$ neben M von Ω, α, β und den Koeffizienten a_{ij}, b abhängt. Somit bildet $f : C^{1,\beta}(\Omega) \to C^{2,\alpha\beta,0}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\beta}(\Omega)$ beschränkte Mengen in relativ kompakte Mengen ab.

Weiter ist f stetig, denn sei $v_k \to v$ stark in $C^{1,\beta}(\Omega)$, so konvergiert $a_{ij}(.,v_k,\nabla v_k) \to a_{ij}(.,v,\nabla v)$, $b(.,v_k,\nabla v_k) \to b(.,v,\nabla v)$ stark in $C^{0,\alpha\beta}(\Omega)$. Für eine Teilfolge können wir annehmen, daß $u_k \to u$ stark in $C^2(\overline{\Omega})$ und $u \in C^{2,\alpha\beta,0}(\Omega)$. Dann ist u eine Lösung von (8.6), also $u = f(v)$ und somit $f(v_k) \to f(v)$ stark in $C^2(\overline{\Omega})$.

Damit ist f eine kompakte Abbildung. Wir setzen $f(v,t) := tf(v)$ für $t \in [0,1]$ und sehen, daß auch $f(.,.)$ kompakt ist.

Gilt $u = f(u,t) = tf(u)$, so ist $u \in C^{2,\alpha\beta,0}(\Omega)$ eine Lösung von (8.4). Zuerst folgt $a_{ij}(.,u,\nabla u)$, $b(.,u,\nabla u) \in C^{0,\alpha}(\Omega)$. Dann folgt mit der Eindeutigkeit der Lösung der linearen Gleichung von Beispiel 6.1, daß $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, also mit (8.5), daß

$$\| u \|_{C^{1,\beta}(\Omega)} < \Lambda.$$

Dann folgt mit dem Fixpunktsatz von Leray-Schauder, Satz 8.5, daß f_1 einen Fixpunkt $u \in C^{1,\beta}(\Omega)$ hat. Wie eben folgt dann $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$, und u ist eine Lösung von (8.4) für $t = 1$.

///

In der Theorie der elliptischen Differentiagleichungen wird die apriori-Abschätzung (8.5) unter weiteren Voraussetzung an die Koeffizienten nach folgendem Schema bewiesen, siehe [GT] §11:

(i) Abschätzung für $\| u \|_{C^0(\Omega)}$.

(ii) Abschätzung für $\| \nabla u \|_{C^0(\partial\Omega)}$ durch $\| u \|_{C^0(\Omega)}$.

(iii) Abschätzung für $\| \nabla u \|_{C^0(\Omega)}$ durch $\| u \|_{C^0(\Omega)}$ und $\| \nabla u \|_{C^0(\partial\Omega)}$.

(iv) Abschätzung für $h\ddot{o}l_{\Omega,\beta} \nabla u$ durch $\| u \|_{C^0(\Omega)}$ und $\| \nabla u \|_{C^0(\Omega)}$.

9 Topologische Anwendungen des Abbildungsgrades

Satz 9.1 (Satz vom Igel)
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $0 \in \Omega$ *und*

$$f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n - \{0\}$$

sei stetig. Wenn n *ungerade ist, so existiert* $x \in \partial\Omega$ *und* $\lambda \neq 0$ *mit*

$$f(x) = \lambda x.$$

Beweis:
Da n ungerade ist, gilt mit Proposition 7.4 (ii)

$$deg(-id, \Omega, 0) = ind(-id, 0) = -1.$$

In jedem Fall gilt mit (7.1)

$$deg(id, \Omega, 0) = ind(id, 0) = 1.$$

Wir erweitern f zu einer stetigen Abbildung

$$f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$$

und wählen $\sigma \in \{\pm 1\}$ mit

$$deg(f, \Omega, 0) \neq deg(\sigma id, \Omega, 0).$$

Mit Proposition 7.3 hat die Homotopie

$$\Phi(x,t) := (1-t)f(x) + \sigma t x$$

eine Nullstelle $(x,t) \in \partial\Omega \times]0,1[$. Dies ergibt

$$f(x) := -\frac{\sigma t}{1-t} x.$$

///

Korollar 9.2 *Es existiert ein stetiges, tangentiales, nicht verschwindendes Vektorfeld an* $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ *genau dann, wenn* n *gerade ist.*

Beweis:
Ist $n = 2m$ gerade, so definieren wir $f : S^{n-1} = \partial B_1(0) \to S^{n-1}$ durch

$$f(x_1, \dots, x_{2m}) := (x_{m+1}, \dots, x_{2m}, -x_1, \dots, -x_m).$$

Dann ist f stetig, $f \neq 0$ und $f(x)$ orthogonal zu x , also tangential an S^{n-1} .

Ist n ungerade, und f ein stetiges, nichtverschwindendes Vektorfeld an S^{n-1} , d.h.

$$f : S^{n-1} = \partial B_1(0) \to \mathbb{R}^n - \{0\},$$

so existiert nach dem Satz vom Igel, Satz 9.1, ein $x \in S^{n-1}$ und $\lambda \neq 0$ mit

$$f(x) = \lambda x,$$

und $f(x)$ ist nicht tangetial an S^{n-1} in x .

$///$

Satz 9.3 (Satz von Borsuk)
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen, symmetrisch bezüglich* 0 *und* $0 \in \Omega$ *. Für stetiges, ungerades*

$$f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n - \{0\},$$

d.h.

$$f(-x) = -f(x),$$

gilt nach Erweiterung zu $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *, daß*

$$deg(f, \Omega, 0) \text{ ungerade ist.}$$

Beweis:
Wir erweitern f zu $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ und setzen

$$\tilde{f}(x) := \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)).$$

Dann ist $\tilde{f}$ ungerade und

$$\tilde{f} = f \quad \text{auf } \partial\Omega,$$

da f ungerade auf $\partial\Omega$ ist. Daher betrachten wir o.B.d.A. $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ungerade.

Nun wählen wir $f_i \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ mit

$$\| f_i - f \|_{C^0(\overline{\Omega})} \to 0.$$

Wir setzen

$$\tilde{f}_i(x) := \frac{1}{2}(f_i(x) - f_i(-x)).$$

Dann ist $\tilde{f}_i$ ungerade, und es gilt

$$\| \tilde{f}_i - f \|_{C^0(\overline{\Omega})} \to 0.$$

da f ungerade ist. Für große i gilt

$$deg(f, \Omega, 0) = deg(\tilde{f}_i, \Omega, 0),$$

und wir können o.B.d.A. annehmen, daß $f \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$.

Schließlich wählen wir $\lambda \notin spec(Df(0))$, $\lambda > 0$ beliebig klein und setzen $\bar{f} = f - \lambda id$, also o.B.d.A.

$$Df(0) \text{ invertierbar.}$$

Im nächsten Schritt wollen wir 0 als regulären Wert erhalten. Genauer:

Behauptung:
Für ε existiert $g \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ungerade mit

$$\| g - f \|_{C^0(\overline{\Omega})} < \varepsilon,$$

und 0 ist regulärer Wert von g .

$\square$

Aus der Behauptung folgt der Satz leicht, denn für ε klein gilt mit Proposition 7.4 (iii), $0 \in \Omega$ und $g(0) = 0$, daß

$$deg(f, \Omega, 0) = deg(g, \Omega, 0) = sgn\ det\ Dg(0) + \sum_{0 \neq x \in g^{-1}(0)} sgn\ det\ Dg(x). \tag{9.1}$$

Da g ungerade ist, gilt für $x \neq 0$ mit $g(x) = 0$ auch $g(-x) = 0$ und

$$Dg(x) = Dg(-x).$$

Also ist die Summe in (9.1) gerade. Da $sgn\ det\ Dg(0) \in \{\pm 1\}$ folgt der Satz.

//

Beweis der Behauptung:
Für $k = 0, \dots, n$ betrachten wir die offenen Mengen

$$\Omega_k := \{x \in \Omega \mid x_i \neq 0 \text{ für ein } 1 \leq i \leq k \ \}.$$

Wir wählen $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ ungerade, mit $\varphi'(0) = 0$ und $\varphi(t) \neq 0$ für $t \neq 0$.

Wir definieren durch Induktion über $k = 0, \dots, n$ Funktionen $g_k \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ beliebig nahe an f in $C^0(\overline{\Omega})$ und ungerade mit

$$\begin{gathered} Dg_k(0) = Df(0), \\ 0 \text{ ist regulärer Wert von } g_k|\Omega_k. \end{gathered} \tag{9.2}$$

Da $\Omega_0 = \emptyset$ erfüllt $g_0 = f$ (9.2) für $k = 0$.

Für $k = 1, \dots, n$ wählen wir g_{k-1} , das (9.2) für $k-1$ erfüllt, und weiter einen regulären Wert $\lambda_k \in \mathbb{R}$, beliebig klein, der Funktion

$$\bar{g}_k(x) := \frac{g_{k-1}(x)}{\varphi(x_k)}$$

auf der offenen Menge $\{x \in \Omega \mid x_k \neq 0 \ \}$, und setzen

$$g_k(x) := g_{k-1}(x) - \lambda_k \varphi(x_k).$$

Es gilt $g_k \in C^\infty(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ ungerade, und für λ_k klein ist g_k beliebig nahe an g_{k-1} bzw. f in $C^0(\overline{\Omega})$. Für $x \in \Omega$ mit $x_k = 0$ gilt

$$\begin{aligned} g_k(x) &= g_{k-1}(x), \\ Dg_k(x) &= Dg_{k-1}(x), \end{aligned} \tag{9.3}$$

da $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$, insbesondere

$$Dg_k(0) = Df(0).$$

Nun sei $x \in \Omega_k$ mit

$$g_k(x) = 0.$$

Ist $x_k = 0$, so folgt $x \in \Omega_{k-1}$ und mit (9.3) $g_{k-1}(x) = 0$, und, da 0 ein regulärer Wert von $g_{k-1}|\Omega_{k-1}$ ist, folgt wieder mit (9.3), daß $Dg_k(x)$ invertierbar ist.

Ist $x_k \neq 0$, so gilt

$$g_k(x) = \varphi(x_k)(\bar{g}_k(x) - \lambda_k)$$

insbesondere

$$\bar{g}_k(x) = \lambda_k$$

und, da λ_k ein regulärer Wert von $\bar{g}_k$ auf $\{x \in \Omega \mid x_k \neq 0\}$ ist, ist

$$D\bar{g}_k(x) \text{ invertierbar.}$$

Weiter gilt

$$Dg_k(x) = \varphi(x_k)D\bar{g}_k(x) + \varphi'(x_k)(\bar{g}_k(x) - \lambda_k)e_k^T = \varphi(x_k)D\bar{g}_k(x),$$

da $\bar{g}_k(x) = \lambda_k$. Nun ist $\varphi(x_k) \neq 0$ und somit $Dg_k(x)$ invertierbar. Also ist 0 ein regulärer Wert von $g_k|\Omega_k$.

//

Schließlich setzen wir $g = g_n$, und 0 ist ein regulärer Wert von g auf Ω , da $Dg(0)$ invertierbar ist und 0 ein regulärer Wert von g_n auf $\Omega_n = \Omega - \{0\}$ ist. Damit ist die Behauptung bewiesen.

///

Korollar 9.4 (Satz von Borsuk-Ulam)
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen, symmetrisch bezüglich* 0 *und* $0 \in \Omega$. *Weiter sei*

$$f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^m$$

stetig und $m < n$.

Dann existiert $x \in \partial\Omega$ *mit*

$$f(x) = f(-x).$$

Beweis:
Falls nicht, so hat die ungerade Abbildung $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

$$g(x) := f(x) - f(-x)$$

keine Nullstelle auf $\partial\Omega$. Wir erweitern g zu $g \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^m)$. Für $y \in B_\varepsilon^n(0) \subseteq \mathbb{R}^n$ und ε klein folgt mit Proposition 7.3 und dem Satz von Borsuk, Satz 9.3, daß

$$deg(g, \Omega, y) = deg(g, \Omega, 0) \neq 0.$$

Dann folgt mit Proposition 7.2, daß

$$B_\varepsilon^n(0) \subseteq g(\Omega) \subseteq \mathbb{R}^m,$$

also ein Widerspruch.

///

Korollar 9.5 (Satz von Lusternik-Schnirelmann)
Es sei $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ *offen, symmetrisch bezüglich* 0 *und* $0 \in \Omega$ *.* $A_1, \ldots, A_n$ *seien abgeschlossene Teilmengen von* $\partial\Omega$ *mit*

$$\partial\Omega = \cup_{i=1}^n A_i.$$

Dann enthält mindestens eine der Mengen A_i *ein Paar antipodaler Punkte* $x, -x \in A_i$ *.*

Beweis: Es sei $\varphi_i : \partial\Omega \to [0, \infty[$ mit

$$\varphi_i(x) := d(x, A_i),$$

und wir definieren $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}^{n-1}$ durch

$$f := (\varphi_i)_{i=1,\ldots,n-1}.$$

Nach dem Satz von Borsuk-Ulam, Korollar 9.4, existiert ein $x \in \partial\Omega$ mit

$$f(x) = f(-x). \tag{9.4}$$

Nun gilt $x \in A_i$ für ein $i = 1, \ldots, n$.
Ist $1 \leq i < n$, so folgt

$$\varphi_i(x) = 0$$

und mit (9.4)

$$\varphi_i(-x) = 0.$$

Dies ergibt $x, -x \in A_i$.
Ist $x \notin A_i$ für $i = 1, \ldots, n-1$, so gilt $x \in A_n$ und $\varphi_i(x) \neq 0$ f ür $i = 1, \ldots, n-1$. Wieder folgt mit (9.4)

$$\varphi_i(-x) \neq 0 \quad \text{für } i = 1, \ldots, n-1,$$

also $-x \notin A_i$. Daraus folgt $x, -x \in A_n$.

///

10 Variationsungleichungen

X sei ein Banachraum, $\emptyset \neq M \subseteq X$ konvex und $f : M \to X^*$ eine Gradientenabbildung, z.B. $f = DF$ mit $F : U(M) \to \mathbb{R}$.

Nun sei $u \in M$ ein absolutes Minimum von F auf M , d.h.

$$F(u) \leq F(v) \quad \text{für alle } v \in M.$$

Daraus folgt

$$0 \leq \partial_{v-u} F(u) = \langle DF(u), v - u \rangle,$$

also

$$\langle f(u), u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M. \tag{10.1}$$

(10.1) heißt Variationsungleichung. Für $u \in int(M)$ folgt $f(u) = 0$.

Wir betrachten hier Variationsungleichungen im Zusammenhang mit monotonen Operatoren.

Definition 10.1 *X sei ein Banachraum und $\emptyset \neq M \subseteq X$ konvex. Eine Abbildung*

$$A : M \to X^*$$

heißt monotoner Operator, falls

(i) A hemistetig ist, d.h.

$$t \mapsto \langle A((1-t)u + tv), w \rangle \text{ ist stetig für } u, v \in M, w \in X,$$

(ii) A ist monoton, d.h.

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq 0 \quad \text{für alle } u, v \in M.$$

A heißt strikt monoton, falls

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle > 0 \quad \text{für alle } u \neq v \in M.$$

A heißt stark monoton, falls

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq \gamma(\| u - v \|) \ \| u - v \| \quad \text{für alle } u, v \in M,$$

wobei $\gamma(t) > 0$ für $t > 0$, $\gamma(t) \to \infty$ für $t \to \infty$ und γ monoton nichtfallend ist.

□

Grundlegend für die Betrachtung von Variationsungleichungen für monotone Operatoren ist das folgende Lemma.

Lemma 10.1 (Minty-Lemma) *X sei ein Banachraum, $\emptyset \neq M \subseteq X$ konvex und $A : M \to X^*$ sei ein monotoner Operator.*

Dann sind für $u \in M, \Lambda \in X^*$ folgende Aussagen äquivalent.

(i)

$$\langle A(u) - \Lambda, u - v \rangle \leq 0 \quad \textit{für alle } v \in M,$$

(ii)

$$\langle A(v) - \Lambda, u - v \rangle \leq 0 \quad \textit{für alle } v \in M.$$

Beweis:
$(i) \Rightarrow (ii)$:
Es gilt

$$\langle A(v) - \Lambda, u - v \rangle = \langle A(u) - \Lambda, u - v \rangle - \langle A(u) - A(v), u - v \rangle \leq 0,$$

da A monoton ist.

//

$(ii) \Rightarrow (i)$:
Für $v \in M$ sei $v_\varepsilon := (1-\varepsilon)u + \varepsilon v = u + \varepsilon(v - u)$ für $\varepsilon > 0$ klein. Dann gilt

$$0 \geq \frac{1}{\varepsilon}\langle u - v_\varepsilon, A(v_\varepsilon) - \Lambda \rangle = \langle u - v, A((1-\varepsilon)u + \varepsilon v) - \Lambda \rangle \to \langle u - v, A(u) - \Lambda \rangle,$$

da A hemistetig ist.

///

Beispiel 10.1 (Quasilineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform III)

Wir betrachten die quasilineare elliptische Differentialgleichung in Divergenzform aus Beispiel 2.2 und 4.3

$$\begin{aligned} -\partial_i(A_i(.,u,\nabla u)) + B(.,u,\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{10.2}$$

mit den Bedingungen (2.1) und (2.2) und den Differentialoperator $f : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)^*$ mit

$$f(u).v := \int_\Omega (A(.,u,\nabla u)\nabla v + B(.,u,\nabla u)v).$$

Betrachten wir vereinfachend, daß $A_i(x,z,w) = A_i(x,w)$ und $B(x,z,w) = B(x)$, so gilt

$$\langle f(u) - f(v), u - v \rangle = \int_\Omega (A(.,\nabla u) - A(.,\nabla v))\ (\nabla u - \nabla v) \geq c_0 \parallel u - v \parallel_{W_0^{1,p}(\Omega)}^p,$$

wobei wir (2.2) und die Poincaré-Ungleichung verwendet haben. Damit ist f stark monoton.

Im allgemeinen ist f aber nicht monoton.

□

Um mehr Anwendungen zu haben, betrachten wir Störungen von monotonen Operatoren. Wir kommen zum Haupsatz dieses Paragraphen.

Satz 10.1 *X sei ein reflexiver Banachraum, $\emptyset \neq M \subseteq X$ konvex und abgeschlossen, und $A : M \times M \to X^*$, $f : M \to X^*$ mit $f(u) = A(u,u)$ erfüllen folgende Bedingungen:*

(i)

$$A(.,u) \text{ ist schwach-stark-stetig auf beschränkten Mengen,} \tag{10.3}$$

d.h. auf beschränkten Mengen ist $A(.,u)$ stetig von der schwachen Topologie auf X in die starke Topologie von X^* ,

(ii)

$$A(w,.) \text{ ist ein monotoner Operator,} \tag{10.4}$$

(iii) f koerziv bezüglich eines Punktes $u_0 \in M$, genauer für $u_j \in M$ gilt

$$\| u_j \| \to \infty \Longrightarrow \liminf_{j\to\infty} \langle f(u_j), u_j - u_0 \rangle > 0, \tag{10.5}$$

(iv) f ist beschränkt auf endlich-dimensionalen Unterräumen, genauer für endlich-dimensionale Unterräume $j : Y \hookrightarrow X$ ist

$$j^* \circ f \circ j : M \cap Y \to Y^* \text{ eine beschränkte Abbildung.} \tag{10.6}$$

Dann hat die Variationsungleichung

$$\langle f(u), u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M \tag{10.7}$$

eine Lösung.

Ist weiter $X = M$, so folgt (10.6) aus (10.3), (10.4).

□

Zuerst kann mit der Koerzivitätsbedingung (10.5) die Lösung der Variationsungleichung (10.7) auf beschränktes M reduziert werden.

Proposition 10.2 *X sei ein Banachraum und $\emptyset \neq M \subseteq X$ konvex und $f : M \to X^*$ erfülle (10.5).*

Falls (10.7) für alle konvexen, abgeschlossenen und beschränkten $M' \subseteq M$ eine Lösung hat, so hat (10.7) auch eine Lösung auf M .

Beweis:
Mit (10.5) existiert $u_0 \in M, R > 0$, so daß

$$\langle f(u), u - u_0 \rangle > 0,$$

falls $\| u \| \geq R$. Es sei

$$M' := M \cap \overline{B_R(0)},$$

und gemäß Voraussetzung existiert $u \in M'$ mit

$$\langle f(u), u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M'. \tag{10.8}$$

Sei weiter $R \geq \| u_0 \|$, also $u_0 \in M'$, so folgt

$$\langle f(u), u - u_0 \rangle \leq 0,$$

also $\| u \| < R$. Daraus folgt für beliebiges $v \in M$, daß

$$v_\varepsilon := (1-\varepsilon)u + \varepsilon v = u + \varepsilon(v-u) \in M',$$

falls $\varepsilon > 0$ klein genug ist.

Wieder folgt mit(10.8), daß

$$0 \geq \langle f(u), u - v_\varepsilon \rangle = \varepsilon \langle f(u), u - v \rangle,$$

also löst u (10.7) auf M .

///

Wir approximieren den allgemeinen Fall in Satz (10.1) durch endlich-dimensionale Räume.

Proposition 10.3 *(10.7) hat unter den Bedingungen von Satz 10.1 eine Lösung, wenn zusätzlich* $\dim X < \infty$.

Beweis:
Mit Proposition 10.2 können wir M als beschränkt annehmen. Falls $M \neq \emptyset$ einpunktig ist, so ist (10.7) trivial. Also habe M mindestens zwei Punkte, und wir nehmen o.B.d.A. $M \subseteq X = \mathbb{R}^n$ mit $int(M) \neq \emptyset$ an. Wir identifizieren $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$ und betrachten $f : M \to \mathbb{R}^n, A : M \times M \to \mathbb{R}^n$.

Für $\delta > 0$ ist

$$M_\delta := M - U_\delta(\partial M)$$

konvex, abgeschlossen und nichtleer, falls δ klein.

Behauptung:

$$f|M_\delta \text{ ist stetig.}$$

Beweis:
Dazu sei $u_i, u \in M_\delta$ mit $u_i \to u$. Mit (10.3) folgt für $v \in M$, daß $A(u_i, v) \to A(u, v)$. Weiter ist $f(u_i)$ mit (10.6) beschränkt, also $A(u_{i_j}, u_{i_j}) = f(u_{i_j}) \to \Lambda \in \mathbb{R}^n$ für eine Teilfolge. Daraus folgt (10.4), daß

$$\langle A(u,v) - \Lambda, u - v \rangle \leftarrow \langle A(u_{i_j}, v) - A(u_{i_j}, u_{i_j}), u_{i_j} - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Mit dem Minty-Lemma 10.1 angewandt auf $A(u, .)$ folgt

$$\langle A(u,u) - \Lambda, u - v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Da $u \in M_\delta \subseteq int(M)$, folgt $f(u) = A(u,u) = \Lambda$, und damit

$$f(u_i) \to f(u).$$

//

Nun sei

$$h_\delta := P_{M_\delta} \circ (id - f)|M_\delta : M_\delta \to M_\delta,$$

wobei $P_{M_\delta} : \mathbb{R}^n \to M_\delta$ die orthogonale Projektion auf die konvexe, kompakte Menge M_δ ist.

Mit dem Fixpunktsatz von Brouwer, Korollar 8.2, hat h_δ mindestens einen Fixpunkt $u_\delta \in M_\delta$. Dann gilt für $w_\delta := u_\delta - f(u_\delta)$, daß $P_{M_\delta}(w_\delta) = u_\delta$ und mit der Definition von P_{M_δ} , daß

$$0 \geq \langle u_\delta - w_\delta, u_\delta - v\rangle = \langle f(u_\delta), u_\delta - v\rangle \quad \text{für alle } v \in M_\delta, \tag{10.9}$$

also löst u_δ (10.7) auf M_δ .

Da $u_\delta \in M$ und M beschränkt ist, folgt mit (10.6) für eine Teilfolge $\delta_i \to 0$, daß

$$u_{\delta_i} \to u \in M, \quad A(u_{\delta_i}, u_{\delta_i}) = f(u_{\delta_i}) \to \Lambda \in \mathbb{R}^n.$$

Daraus folgt für $v \in M$ mit (10.3), daß

$$A(u_{\delta_i}, v) \to A(u, v),$$

und mit (10.4), daß

$$\langle A(u,v) - \Lambda, u - v\rangle \leftarrow \langle A(u_{\delta_i}, v) - A(u_{\delta_i}, u_{\delta_i}), u_{\delta_i} - v\rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Mit dem Minty-Lemma 10.1 angewandt auf $A(u, .)$ erhalten wir

$$\langle A(u,u) - \Lambda, u - v\rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Für $v \in int(M) = \cup_{i\in\mathbb{N}} M_{\delta_i}$ folgt mit (10.9)

$$\langle \Lambda, u - v\rangle \leftarrow \langle f(u_{\delta_i}), u_{\delta_i} - v\rangle \leq 0$$

und

$$\langle f(u), u - v\rangle = \langle A(u,u) - \Lambda, u - v\rangle + \langle \Lambda, u - v\rangle \leq 0.$$

Da $M = \overline{int(M)}$, erhalten wir (10.7).

///

Beweis von Satz 10.1:

Mit Proposition 10.2 können wir $M \subseteq B_R(0)$ als beschränkt annehmen.

Für $v \in M$ definieren wir

$$S(v) := \{u \in M \mid \langle A(u,v), u - v\rangle \leq 0 \}.$$

Behauptung:

$S(v)$ ist schwach kompakt.

Beweis:

Da $S(v) \subseteq M$ beschränkt und X reflexiv ist, genügt es nach dem Satz von Banach-Alaoglu zu zeigen, daß $S(v)$ schwach abgeschlossen ist.

Dazu sei $u \in M \backslash S(v)$, also $\langle A(u,v), u-v \rangle =: \mu > 0$. Wegen (10.3) gibt es eine schwache Umgebung U von u , so daß für alle $w \in U \cap M$ gilt

$$|\langle A(u,v), u-w \rangle| < \frac{\mu}{2}, \quad \| A(w,v) - A(u,v) \| < \frac{\mu}{4R}.$$

Daraus folgt für $w \in M \cap U$, daß

$$\begin{gathered} \langle A(w,v), w-v \rangle = \\ = \langle A(w,v) - A(u,v), w-v \rangle + \langle A(u,v), w-u \rangle + \langle A(u,v), u-v \rangle > \\ > -\tfrac{\mu}{4R} \| w-v \| - \tfrac{\mu}{2} + \mu \geq 0, \end{gathered}$$

da $M \subseteq B_R(0)$. Daraus folgt $U \cap S(v) = \emptyset$, und $S(v)$ ist schwach abgeschlossen.

//

Falls nun für beliebige, endlich viele $v_1, \ldots, v_m \in M$

$$S(v_1) \cap \ldots \cap S(v_m) \neq \emptyset, \tag{10.10}$$

so existiert

$$u \in \cap_{v \in M} S(v) \neq \emptyset,$$

d.h.

$$\langle A(u,v), u-v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Mit dem Minty-Lemma 10.1 folgt

$$\langle f(u), u-v \rangle = \langle A(u,u), u-v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in M,$$

und u löst (10.7) auf M .

Wir zeigen (10.10). Dazu sei $Y := span\{v_1, \ldots, v_m\} \subseteq X$ endlich-dimensional. Setzen wir $\tilde{M} := M \cap Y$ und definieren wir $\tilde{f} : \tilde{M} \to Y^*$, $\tilde{A} : \tilde{M} \times \tilde{M} \to Y^*$ durch

$$\begin{gathered} \langle \tilde{A}(w,u), v \rangle := \langle A(w,u), v \rangle \quad \text{für } w, u \in \tilde{M}, v \in Y, \\ \tilde{f}(u) := \tilde{A}(u,u) \quad \text{für } u \in \tilde{M} \end{gathered}$$

so existiert mit Proposition 10.3 ein $u \in \tilde{M}$, das

$$\langle A(u,u), u-v \rangle = \langle \tilde{f}(u), u-v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in \tilde{M}$$

erfüllt. Mit dem Minty-Lemma 10.1 folgt

$$\langle A(u,v), u-v \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in \tilde{M},$$

also

$$u \in S(v_1) \cap \ldots \cap S(v_m),$$

da $v_i \in M \cap Y = \tilde{M}$. Dies ergibt (10.10).

Es verbleibt zu zeigen, daß (10.6) im Fall $X = M$ aus (10.3), (10.4) folgt. Für $j : Y \hookrightarrow X$ endlich-dimensional ist

$$\tilde{A} := j^* \circ A \circ (j \times j) : Y \times Y \to Y^*, \quad \tilde{f}(u) := \tilde{A}(u, u),$$

im ersten Argument stetig und im zweiter Argument ein monotoner Operator.

Angenommen

$$\| \tilde{f}(u_i) \| \to \infty$$

für eine beschränkte Folge $u_i \in Y$. Für eine Teilfolge gilt

$$u_i \to u \quad \text{stark in } Y, \qquad \frac{\tilde{f}(u_i)}{\| \tilde{f}(u_i) \|} \to \Lambda \quad \text{stark in } Y^*,$$

mit $\| \Lambda \| = 1$.

Da $\tilde{A}$ im zweiten Argument monoton ist, folgt für alle $v \in Y$, daß

$$0 \le \| \tilde{A}(u_i, u_i) \|^{-1} \langle \tilde{A}(u_i, u_i) - \tilde{A}(u_i, v), u_i - v \rangle \to \langle \Lambda, u - v \rangle,$$

da $\tilde{A}(u_i, v) \to \tilde{A}(u, v)$ und $\| \tilde{A}(u_i, u_i) \| \to \infty$.

Da $v \in Y$ beliebig war, folgt $\Lambda = 0$ im Widerspruch zu $\| \Lambda \| = 1$. Damit ist (10.6) bewiesen.

///

Als Korollar ergibt sich folgender klassischer Satz für Variationsungleichungen für monotone Operatoren.

Korollar 10.2 (Satz von Brouwder 1963, Minty 1963)
X sei ein reflexiver Banachraum und $A : X \to X^*$ ein monotoner Operator, der koerziv ist im Sinne von

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\| u \|} = \infty. \tag{10.11}$$

Dann ist A surjektiv.

Beweis:
Für $\Lambda \in X^*$ ist

$$f(u) := A(u) - \Lambda$$

ein monotoner Operator. Aus (10.11) folgt

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle f(u), u \rangle}{\| u \|} = \infty,$$

also insbesondere (10.5) für $u_0 = 0$.

Mit Satz 10.1 existiert $u \in X$ mit

$$\langle f(u), u - v \rangle \le 0 \quad \text{für alle } v \in X,$$

also $f(u) = 0$ und $A(u) = \Lambda$.

///

Für separables X erhalten wir das folgende Korollar.

Korollar 10.3 *Ist X separabel, so kann in Satz 10.1 die Stetigkeitsbedingung (10.3) durch Vollstetigkeit ersetzt werden, d.h. für $w_j, w \in M, w_j \to w$ schwach in X gilt*

$$A(w_j, u) \to A(w, u) \textit{ stark in } X^*. \tag{10.12}$$

Beweis:
Wir zeigen allgemein für Banachräume X, Y mit X separabel und reflexiv, $\emptyset \neq M \subseteq X$ beschränkt, daß eine vollstetige Abbildung $g : M \to Y$ auch schwach-stark-stetig ist.

Da X separabel und reflexiv ist, ist auch X^* separabel, siehe [A] Satz 6.8. Es sei $\{\Lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ dicht in X^* .

Nun sei $V \subseteq Y$ offen in der starken Topologie von Y und $U := g^{-1}(V) \subseteq M \subseteq X$. Wir zeigen, daß U schwach offen in M ist.

Angenommen $x \in U$ sei kein schwach innerer Punkt von U , dann existieren $x_i \in M \backslash U$ mit

$$|\Lambda_j(x_i - x)| < 1/i \quad \text{für } j \leq i.$$

Daraus folgt

$$\Lambda_j x_i \to \Lambda_j x \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N} \text{ und } i \to \infty,$$

und, da $x_i \in M$ beschränkt sind,

$$\Lambda x_i \to \Lambda x \quad \text{für alle } \Lambda \in X^* \text{ und } i \to \infty.$$

Also

$$x_i \in M \backslash U, \quad x_i \to x \text{ schwach in } X.$$

Da g vollstetig ist, folgt

$$g(x_i) \to g(x) \in V \quad \text{stark in } Y,$$

also

$$g(x_i) \in V \quad \text{für fast alle } i \in \mathbb{N}.$$

Dies ist ein Widerspruch, da

$$x_i \notin U = g^{-1}(V).$$

///

Beispiel 10.2 (Quasilineare elliptische Systeme in Divergenzform IV)
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n, n, m \in \mathbb{N}, 1 < p < \infty$ und

$$A_i : \Omega \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^m,$$
$$B : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m,$$

seien Caratheodoryfunktionen mit den Wachstumsbedingungen

$$|A_i(x, z, w)|, |B(x, z)| \leq \varphi(x) + C(|z|^{p-1} + \parallel w \parallel^{p-1}), \tag{10.13}$$

wobei $\varphi \in L^q(\Omega), q = \frac{p}{p-1}$,
mit der Monotoniebedingung

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (A_i^j(x,z,w_2) - A_i^j(x,z,w_1)) \ (w_2 - w_1)_i^j \geq 0 \tag{10.14}$$

und mit den Koerzivitätsbedingungen

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} A_i^j(x,z,w) w_i^j \geq c_0 \parallel w \parallel^p - \delta |z|^p - \varphi_\delta(x), \\ \sum_{j=1}^{m} B^j(x,z) z^j \geq -\delta |z|^p - \varphi_\delta(x), \end{gathered} \tag{10.15}$$

für ein $c_0 > 0$ und zu jedem $\delta > 0$ existiert $\varphi_\delta \in L^1(\Omega)$.

Dann hat das quasilineare elliptische System

$$\begin{gathered} -\partial_i (A_i^j(.,u,\nabla u)) + B^j(.,u) = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{gathered} \tag{10.16}$$

eine schwache Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, d.h.

$$\int\limits_{\Omega} (A_i^j(.,u,\nabla u)\partial_i v^j + B^j(.,u)v^j) = 0 \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m).$$

Beweis:
Es sei $X := W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ und $A : X \times X \to X^*$ mit

$$\langle A(w,u), v \rangle := \int\limits_{\Omega} (A_i^j(.,w,\nabla u)\partial_i v^j + B^j(.,w)v^j).$$

Mit (10.13) ist A wohldefiniert, beschränkt und stetig, und mit (10.14) ist A im zweiten Argument ein monotoner Operator.

A ist im ersten Argument vollstetig, denn sei $w_k \to w$ schwach in $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, so folgt mit dem Satz von Rellich, Beispiel 4.1, $w_k \to w$ stark in $L^p(\Omega)$ und mit Beispiel 2.1, daß

$$A(.,w_k,\nabla u) \to A(.,w,\nabla u) \quad \text{und} \quad B(.,w_k) \to B(.,w) \quad \text{stark in } L^q(\Omega).$$

Für $v \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ gilt

$$\begin{gathered} |\langle A(w_k,u) - A(w,u), v \rangle| \leq \\ \leq \parallel A(.,w_k,\nabla u) - A(.,w,\nabla u) \parallel_{L^q(\Omega)} \parallel \nabla v \parallel_{L^p(\Omega)} + \\ + \parallel B(.,w_k) - B(.,w) \parallel_{L^q(\Omega)} \parallel v \parallel_{L^p(\Omega)}, \end{gathered}$$

also

$$\begin{gathered} \parallel A(w_k,u) - A(w,u) \parallel_{W_0^{1,p}(\Omega)^*} \leq \\ \leq \parallel A(.,w_k,\nabla u) - A(.,w,\nabla u) \parallel_{L^q(\Omega)} + \parallel B(.,w_k) - B(.,w) \parallel_{L^q(\Omega)} \to 0. \end{gathered}$$

Schließlich verifizieren wir die Koerzivitätsbedingung (10.5) für $f(u) := A(u,u)$. Es gilt mit (10.15) und der Poincaré-Ungleichung

$$\begin{aligned}\langle f(u), u\rangle &= \int_\Omega (A(.,u,\nabla u)\nabla u + B(.,u)u) \geq \\ &\geq c_0 \parallel \nabla u \parallel^p_{L^p(\Omega)} - 2\delta \parallel u \parallel^p_{L^p(\Omega)} - C_\delta \geq \\ &\geq c_1 \parallel u \parallel^p_{W_0^{1,p}(\Omega)} - C_\delta\end{aligned}$$

für δ klein genug.

Nach Korollar 10.3 existiert eine Lösung $u \in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)$ der Variationsungleichung

$$\langle f(u), u-v\rangle \leq 0 \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m),$$

also $f(u) = 0$, und u löst (10.16).

///

Beispiel 10.3
Wir betrachten die semilineare elliptische Differentialgleichung

$$\begin{aligned}-\Delta u + B(u) &= \varphi \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega,\end{aligned} \tag{10.17}$$

wobei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^n$ offen, $\varphi \in L^2(\Omega)$, $B \in C^{0,1}_{loc}(\mathbb{R})$ monoton nichtfallend ist.

B erfüllt i.a. nicht die Wachstumsbedingung aus Beispiel 10.2. Wegen der Monotonie von B gilt:
Behauptung:
Es existiert eine Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $B(u) \in L^2(\Omega)$ von (10.17).
Beweis:
Dazu wählen wir $B_k \in C^1_b(\mathbb{R})$ nichtfallend mit

$$B_k \to B \quad \text{gleichmäßig auf kompakten Teilmengen von } \mathbb{R}.$$

Wir definieren $A_k : W_0^{1,2}(\Omega) \to W_0^{1,2}(\Omega)^*$ durch

$$\langle A_k(u), v\rangle := \int_\Omega (\nabla u \nabla v + B_k(u)v).$$

Dann ist A_k stetig, monoton und koerziv im Sinne von (10.11), da

$$\begin{aligned}\langle A_k(u) - A_k(v), u-v\rangle &\geq \int_\Omega (|\nabla(u-v)|^2 + (B_k(u) - B_k(v))(u-v)) \geq \\ &\geq \parallel \nabla(u-v) \parallel^2_{L^2(\Omega)} \geq c_0 \parallel u-v \parallel^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}\end{aligned}$$

mit der Poincaré-Ungleichung.

Mit dem Satz von Brouwder-Minty, Korollar 10.2, existiert $u_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $A_k(u_k) = \varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)^*$, d.h.

$$\int\limits_\Omega (\nabla u_k \nabla v + B_k(u_k)v) = \int\limits_\Omega \varphi v \quad \text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega). \tag{10.18}$$

Wir können o.B.d.A. $B(0) = B_k(0) = 0$ annehmen, indem wir B durch $B - B(0)$ und φ durch $\varphi - B(0)$ ersetzen. Dann gilt $B_k(z)z \geq 0$ für $z \in \mathbb{R}$.

Für $v = u_k$ in (10.18) folgt

$$\| \nabla u_k \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int\limits_\Omega (|\nabla u_k|^2 + B_k(u_k)u_k) =$$
$$= \int\limits_\Omega \varphi u_k \leq \delta \| u_k \|_{L^2(\Omega)}^2 + C_\delta \| \varphi \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C\delta \| \nabla u_k \|_{L^2(\Omega)}^2 + C_\delta \| \varphi \|_{L^2(\Omega)}^2$$

mit der Poincaré-Ungleichung, also

$$\| \nabla u_k \|_{L^2(\Omega)} \leq C.$$

Für eine Teilfolge gilt mit dem Satz von Rellich, Beispiel 4.1,

$$\begin{aligned} u_k \to u \quad &\text{schwach in } W_0^{1,2}(\Omega), \text{ stark in } L^2(\Omega), \\ B_k(u_k) \to B(u) &\text{ punktweise fast überall in } \Omega. \end{aligned} \tag{10.19}$$

Da $B_k \in C_b^1(\mathbb{R}), B_k(0) = 0$, überzeugt man sich leicht, daß $B_k(u_k) \in W_0^{1,2}(\Omega)$ und

$$\nabla(B_k(u_k)) = B_k'(u_k)\nabla u_k.$$

Da $B_k' \geq 0$, folgt mit $v = B_k(u_k)$ in (10.18), daß

$$\| B_k(u_k) \|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \int\limits_\Omega (B_k'(u_k)|\nabla u_k|^2 + B_k(u_k)^2) =$$
$$= \int\limits_\Omega \varphi B_k(u_k) \leq \tfrac{1}{2} \| B_k(u_k) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \tfrac{1}{2} \| \varphi \|_{L^2(\Omega)}^2,$$

also

$$\| B_k(u_k) \|_{L^2(\Omega)} \leq \| \varphi \|_{L^2(\Omega)} .$$

Mit (10.19), dem Lemma von Fatou und dem Konvergenzsatz von Vitali folgt $B(u) \in L^2(\Omega)$ und

$$B_k(u_k) \to B(u) \quad \text{schwach in } L^2(\Omega).$$

Dann ergibt (10.18) für $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$, daß

$$\int\limits_\Omega (\nabla u \nabla v + B(u)v) \leftarrow \int\limits_\Omega (\nabla u_k \nabla v + B_k(u_k)v) = \int\limits_\Omega \varphi v,$$

also ist $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ eine Lösung von (10.17) mit $B(u) \in L^2(\Omega)$.

///

Beispiel 10.4 (Hindernisproblem)
Es seien Ω, A_i, B wie in Beispiel 10.2 für $m = 1$. Weiter sei $u_\pm : \Omega \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ meßbar mit

$$u_- \le 0 \le u_+.$$

Wir setzen

$$M := \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \mid u_- \le v \le u_+ \text{ fast überall auf } \Omega\ \}.$$

$M \neq \emptyset$ ist konvex und abgeschlossen in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dann existiert nach Korollar 10.3 ein $u \in M$ mit

$$\int_\Omega (A(., u, \nabla u)\nabla(u - v) + B(., u)(u - v)) \le 0 \quad \text{für alle } v \in M.$$

Formal heißt dies

$$\begin{aligned} u_- \le u \le u_+ \quad &\text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad &\text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -\partial_i(A_i(., u, \nabla u)) + B(., u) = 0 \quad &\text{in } [u_- < u < u_+], \\ -\partial_i(A_i(., u_+, \nabla u_+)) + B(., u_+) = & \\ = -\partial_i(A_i(., u, \nabla u)) + B(., u) \le 0 \quad &\text{in } [u = u_+], \\ -\partial_i(A_i(., u_-, \nabla u_-)) + B(., u_-) = & \\ = -\partial_i(A_i(., u, \nabla u)) + B(., u) \ge 0 \quad &\text{in } [u = u_-]. \end{aligned}$$

□

Beispiel 10.5 (Stationäre Navier-Stokes Gleichung in $\mathbb{R}^3$)
Die stationäre Navier-Stokes Gleichung in $\mathbb{R}^3$ lautet:

$$\begin{aligned} -\nu\Delta u + u\nabla u + \nabla p = \varphi \quad &\text{in } \Omega, \\ div\ u = 0 \quad &\text{in } \Omega, \\ u = u^0 \quad &\text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{10.20}$$

Dabei ist $\emptyset \neq \Omega \subset\subset \mathbb{R}^3$ offen, $\partial\Omega$ glatt, $\nu > 0$, $\varphi \in L^{6/5}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ und $u^0 \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $div\ u^0 = 0$.

$u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ heißt Lösung von (10.20), falls

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nu\partial_i u_j \partial_i v_j + u_i \partial_i u_j v_j) = \int_\Omega \varphi_j v_j \quad &\text{für alle } v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \text{ mit } div\ v = 0, \\ div\ u = 0 \quad &\text{in } \Omega, \\ u - u^0 \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3).& \end{aligned} \tag{10.21}$$

Behauptung:
Es existiert $\varepsilon > 0$ *mit:*
Falls
$$\| u^0 - \bar{u}^0 \|_{L^3(\Omega)} < \varepsilon\nu \quad \textit{für ein } \bar{u}^0 \in \mathbb{R}^3, \tag{10.22}$$
so existiert eine Lösung $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ *von (10.20).*
Beweis:
Es sei $X := \{v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3) \mid div\ v = 0\ \}$ und
$$M := \{v \in X \mid v - u^0 \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)\ \} = u^0 + (X \cap W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)).$$
Weiter seien $f, A, K : M \to X^*, f := A + K - \varphi$ und
$$\langle A(u), v\rangle := \int_\Omega \nu \partial_i u_j \partial_i v_j, \quad \langle K(u), v\rangle := \int_\Omega u_i \partial_i u_j v_j, \quad \langle \varphi, v\rangle := \int_\Omega \varphi_j v_j,$$
für $v \in X$. Dabei beachten wir, daß die Einbettung $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ stetig ist. Daher sind f, A, K für $\varphi \in L^{6/5}(\Omega)$ wohldefiniert und stetig. Weiter bilden f, A, K beschränkte Mengen von $M \subseteq X$ in beschränkte Mengen von X^* ab.

Klarerweise ist A ein monotoner Operator.

Um die Stetigkeitsbedingung für $A(w, u) := A(u) + K(w) - \varphi$ im ersten Argument zu verifizieren, genügt es zu zeigen, daß K vollstetig ist.

Dazu sei $u^k, u \in M$ und $u^k \to u$ schwach in X . Mit der stetigen Einbettung $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$, dem Satz von Rellich, Beispiel 4.1, und dem Konvergenzsatz von Vitali folgt
$$u^k \to u \quad \text{stark in } L^4(\Omega, \mathbb{R}^3)$$
und
$$u_i^k u_j^k \to u_i u_j \quad \text{stark in } L^2(\Omega). \tag{10.23}$$
Nun zeigt man durch Approximation von $u, v \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ durch Funktionen aus $C^\infty(\overline{\Omega})$, daß für $u \in M, v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$
$$\langle K(u), v\rangle = \int_\Omega u_i \partial_i u_j v_j = -\int_\Omega (\partial_i u_i) u_j v_j - \int_\Omega u_i u_j \partial_i v_j = -\int_\Omega u_i u_j \partial_i v_j. \tag{10.24}$$
Daraus folgt
$$\| K(u^k) - K(u) \|_{X^*} \leq \sum_{i,j=1}^{3} \| u_i^k u_j^k - u_i u_j \|_{L^2(\Omega)} .$$
Mit (10.23) folgt $K(u^k) \to K(u)$ stark in X^* , und K ist vollstetig.

Es verbleibt die Koerzivitätsbedingung (10.5) zu verifizieren. Dazu betrachten wir für $u \in M, v := u - u^0 \in X \cap W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Mit (10.24) folgt
$$\langle f(u) - f(u^0), u - u^0\rangle = \nu \int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega (u_i u_j - u_i^0 u_j^0) \partial_i v_j. \tag{10.25}$$
Wir schreiben
$$\begin{aligned} u_i u_j - u_i^0 u_j^0 &= v_i u_j^0 + u_i^0 v_j + v_i v_j = \\ &= v_i \bar{u}_j^0 + (\bar{u}_i^0 + v_i) v_j + \Big(v_i (u_j^0 - \bar{u}_j^0) + (u_i^0 - \bar{u}_i^0) v_j \Big). \end{aligned} \tag{10.26}$$

Setzen wir die ersten beiden Terme in (10.25) ein, so erhalten wir

$$\int_\Omega v_i \bar{u}_j^0 \partial_i v_j = -\int_\Omega (\partial_i v_i) \bar{u}_j^0 v_j = 0$$

und

$$\int_\Omega (\bar{u}_i^0 + v_i) v_j \partial_i v_j = \frac{1}{2} \int_\Omega (\bar{u}_i^0 + v_i) \partial_i (|v|^2) = -\frac{1}{2} \int_\Omega \partial_i (\bar{u}_i^0 + v_i) \; |v|^2 = 0,$$

da $|v|^2 \in L^3(\Omega)$, $v_j \partial_i v_j \in L^{3/2}(\Omega)$, $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ also $|v|^2 \in W_0^{1,3/2}(\Omega)$ und $v + \bar{u}^0 \in W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$.

Setzen wir die letzten beiden Terme aus (10.26) in (10.25) ein, so ergibt sich

$$|\int_\Omega (v_i(u_j^0 - \bar{u}_j^0) + (u_i^0 - \bar{u}_i^0) v_j) \partial_i v_j| \leq$$
$$\leq C \parallel v \parallel_{L^6(\Omega)} \parallel u^0 - \bar{u}^0 \parallel_{L^3(\Omega)} \parallel \nabla v \parallel_{L^2(\Omega)} \leq C \varepsilon \nu \parallel v \parallel^2_{W^{1,2}(\Omega)},$$

wobei wir (10.22) und die Stetigkeit der Einbettung $W^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^6(\Omega)$ verwendet haben.

Mit (10.25) und der Poincaré-Unlgeichung erhalten wir

$$\langle f(u) - f(u^0), u - u^0 \rangle \geq c_0 \nu \parallel v \parallel^2_{W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)},$$

falls ε klein genug ist. Daraus folgt für $u \in M$ mit $\parallel u \parallel_X \to \infty$, daß

$$\frac{\langle f(u) - f(u^0), u - u^0 \rangle}{\parallel u - u^0 \parallel_X} \to \infty$$

und

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \langle f(u), u - u^0 \rangle = \infty,$$

d.h. (10.5). Aus Korollar 10.3 folgt nun, daß $u \in M$ existiert mit

$$\langle f(u), u - \tilde{v} \rangle \leq 0 \quad \text{für alle } \tilde{v} \in M.$$

Für $v \in W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ mit $div \; v = 0$, also $v \in X \cap W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)$ ist $\tilde{v} := u \pm v \in u^0 + (X \cap W_0^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^3)) = M$, also

$$0 = \langle f(u), v \rangle = \int_\Omega (\nu \partial_i u_j \partial_i v_j + u_i \partial_i u_j v_j - \varphi_j v_j).$$

Damit erfüllt u (10.21) und ist somit eine Lösung von (10.20).

///

Literatur

[A90] Alt, H.W., (1990) Funktionalanalysis II, Vorlesungsmitschrift Universität Bonn.

[A] Alt, H.W., (1999) Lineare Funktionalanalysis, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.

[B] Berger, M., (1977) Nonlinearity in Functional Analysis, Academic Press, New York - San Francisco - London.

[D] Deimling, K., (1980) Nonlinear Functional Analysis, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.

[F] Friedman, A., (1982) Variational Principles and Free Boundary Problems, Wiley & Sons, New York.

[GT] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., (1983) Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo.

[M] Milnor, J., (1965) Topology from the differentiable viewpoint, The University Press of Virginia, Charlottesville.

[N] Nirenberg, L., (1973) Topics in Functional Analysis, New York University.

[Z] Zeidler, E., (1985) Nonlinear Functional Analysis and its Applications I. Fixed-Point Theorems, Springer Verlag, Berlin - Heidelberg - New York.