Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
PD Dr. Ruben Jakob 01.07.11

Nichtlineare Funktionalanalysis
SS 2011
10.Übung

AUFGABE 37:
Es sei $f \in C^0(I\!R^n, I\!R^n)$ mit

$$\lim_{|x|\to\infty} \frac{\langle f(x), x\rangle}{|x|} = \infty.$$

Zeigen Sie, daß f surjektiv ist.
(Hinweis: Untersuchen Sie das Verhalten der Homotopie $h(x,t) := tx + (1-t)f(x) - y$ für grosse $|x|$.)

AUFGABE 38: (Alternativer Beweis des Fixpunktsatzes von Brouwer)
Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) M und N seien glatte, kompakte Mannigfaltigkeiten der Dimensionen $n \geq m$ mit Rand und $\partial N = \emptyset$. $f : M \to N$ sei eine glatte Abbildung und $y \in N$ ein regulärer Wert von f und $f|\partial M$. Dann ist $f^{-1}(y)$ eine glatte Manngifaltigkeit der Dimension $(n-m)$ mit Rand und

$$\partial(f^{-1}(y)) = f^{-1}(y) \cap \partial M.$$

(ii) Es existiert keine glatte Abbildung $f : M \to \partial M$ mit $f|\partial M = id_{\partial M}$.

(iii) Jede stetige Abbildung $f : \overline{B_1(0)} \to \overline{B_1(0)}$ hat einen Fixpunkt.

AUFGABE 39:
Aus der Theorie der Sobolevfunktionen ist bekannt, daß für $n < p < \infty$ und $\alpha := 1 - \frac{n}{p} \in]0,1[$ die Einbettung

$$W^{2,p}(B_1^n(0)) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(B_1^n(0))$$

existiert und stetig ist.

Nun sei $\varphi \in L^p(B_1(0))$. Zeigen Sie, daß für $\varrho > 0$ klein genug ein $u \in W^{2,p}(B_\varrho(0))$ mit

$$-\nabla\left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1+|\nabla u|^2}}\right) = \varphi \quad \text{in } B_\varrho(0),$$
$$u = 0 \quad \text{auf } \partial B_\varrho(0)$$

existiert.
(Hinweis: Durch Reskalierung genügt es, den Fall $\varrho = 1$ und kleiner L^p−Norm von φ zu betrachten. Schreiben Sie die Differentialgleichung in Nichtdivergenzform $-a_{ij}(\nabla u)\partial_{ij}u = \varphi$ und zeigen Sie mittels der Calderon-Zygmund-Abschätzungen aus Aufgabe 29 und dem Fixpunktsatz 8.3 von Schauder, daß der Lösungsoperator $f : C^{1,\beta}(B_1^n(0)) \longrightarrow C^{1,\beta}(B_1^n(0))$, für $0 < \beta < \alpha$, welcher jedem $v \in C^{1,\beta}(B_1^n(0))$ das Bild unter der Einbettung $W^{2,p}(B_1^n(0)) \hookrightarrow C^{1,\beta}(B_1^n(0))$ der eindeutigen Lösung

$u \in W^{2,p}(B_1^n(0)) \cap W_0^{1,p}(B_1^n(0))$ der Gleichung $-a_{ij}(\nabla v)\partial_{ij}u = \varphi$ zuordnet, kompakt ist und somit einen Fixpunkt hat.)

Abgabetermin ist Freitag, 08.07.11.