Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
PD Dr. Ruben Jakob

08.07.11

Nichtlineare Funktionalanalysis
SS 2011
11.Übung

AUFGABE 40:
Es sei f eine kompakte Abbildung eines Banachraumes X in sich selbst, und es existiere $\Lambda < \infty$ mit

$$\| x \| < \Lambda$$

für alle $x \in X$ und $\sigma \in [0,1]$ mit $x = \sigma f(x)$. Zeigen Sie, daß f einen Fixpunkt hat.

AUFGABE 41: (Stationäre Navier-Stokes-Gleichung in $I\!R^3$.)
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset I\!R^3$ offen, und $X := \{u \in W_0^{1,2}(\Omega, I\!R^3) \mid div\ u = 0\ \}$ der Banachraum der divergenzfreien $W^{1,2}(\Omega)-$Vektorfelder mit Nullrandwerten. Zeigen Sie, daß die stationäre Navier-Stokes-Gleichung

$$\begin{aligned} -\nu\Delta u + u \cdot Du + \nabla p = \varphi \quad \text{in } \Omega, \\ div\ u = 0 \quad \text{in } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned}$$

für $\nu > 0,\ \varphi \in L^2(\Omega, I\!R^3)$ eine Lösung hat, d.h. es existiert $u \in X$, so daß

$$\int_\Omega (\nu \partial_i u_j\ \partial_i v_j + u_i\ \partial_i u_j\ v_j) = \int_\Omega \varphi_j v_j \quad \text{für alle } v \in X.$$

Zeigen Sie weiter, daß die Lösung eindeutig ist, falls φ klein in der L^2-Norm ist.
(Hinweis: Verwenden Sie, daß die Einbettung $W_0^{1,2}(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ für $\Omega \subset\subset I\!R^3$ kompakt ist, und zeigen Sie damit, daß $\int_\Omega u_i\ \partial_i u_j\ u_j = 0$ für $u \in X$. Benutzen Sie dann den Fixpunktsatz von Schauder in Form von Aufgabe 40.)

AUFGABE 42:
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset I\!R^n$ offen, $1 \leq p < \infty$ und $A : W_0^{1,p}(\Omega) \to W_0^{1,p}(\Omega)^*$ definiert durch

$$\langle A(u), v \rangle := \int_\Omega |\nabla u|^{p-2} \nabla u\ \nabla v.$$

Zeigen Sie, daß A ein monotoner Operator und für $p > 1$ koerziv ist, im Sinne, daß

$$\lim_{\|u\| \to \infty} \frac{\langle A(u), u \rangle}{\| u \|} = \infty.$$

AUFGABE 43:
X sei ein Banachraum und $A : X \to X^*$ ein monotoner Operator. Zeigen Sie, daß A beschränkt ist, falls X endlich-dimensional ist, und daß A im allgemeinen Fall zumindest

lokal beschränkt ist.
(Hinweis: Wenden Sie den Baireschen Kategoriensatz auf die Mengen $M_k := \{u \in \overline{B_1(0)} \mid \forall v \in \overline{B_1(0)} : \langle A(v), u - v\rangle \leq k \}$ für $k \in \mathbb{N}$ an.)

Abgabetermin ist Freitag, 15.07.11.