Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
PD Dr. Ruben Jakob 29.04.11

Nichtlineare Funktionalanalysis
SS 2011
2.Übung

AUFGABE 4:

Es sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq I\!R^n$ offen, $\alpha \in (0,1]$ und $k \in I\!N_0$. Beweisen Sie, dass für $u, v \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ die Ungleichung

$$\text{höl}_{\Omega,\alpha}(uv) \leq \text{höl}_{\Omega,\alpha}(u) \parallel v \parallel_{L^\infty(\Omega)} + \text{höl}_{\Omega,\alpha}(v) \parallel u \parallel_{L^\infty(\Omega)}$$

und somit für $u, v \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ eine Abschätzung der Form

$$\parallel uv \parallel_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \leq C(n,k) \parallel u \parallel_{C^{k,\alpha}(\Omega)} \parallel v \parallel_{C^{k,\alpha}(\Omega)}$$

gilt. (4)

AUFGABE 5:

Man beweise die folgende Behauptung aus der Vorlesung:
Ist $A : \Omega \times I\!R \times I\!R^n \to I\!R$ eine Caratheodory-Funktion, welche der Wachstumsbedingung (2.1) aus der Vorlesung, also der Bedingung

$$\mid A(x,z,w) \mid \leq C(\varphi(x) + \mid z \mid^{p/q} + \mid w \mid^{p/q})$$

für $1 \leq p, q < \infty$ auf $\Omega \times I\!R \times I\!R^n$ und ein $\varphi \in L^q(\Omega)$, genüge, so liefert die Zuordnung $u \mapsto f(u) := A(\,\cdot\,, u, \nabla u)$ eine stetige Abbildung von $W^{1,p}(\Omega)$ nach $L^q(\Omega)$. (4)

Hinweis: Verwenden Sie hierfür den Konvergenzsatz von Vitali: Sei $\emptyset \neq \Omega \subset I\!R^n$ offen und beschränkt und $1 \leq q < \infty$. Es sei $\{f_n\} \subset L^q(\Omega)$ eine punktweise konvergente Folge, also mit $f_n(x) \to f(x)$ in $\mathcal{L}^n$-f.a. $x \in \Omega$. Dann gilt $f \in L^q(\Omega)$ und $f_n \to f$ in $L^q(\Omega)$ genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jede $\mathcal{L}^n$-meßbare Teilmenge E von Ω mit $\mathcal{L}^n(E) < \delta$ bereits $\parallel f_n \parallel_{L^q(\Omega)} < \epsilon$ für alle $n \in I\!N$ erfüllt ist.

AUFGABE 6:

Beweisen Sie das Lemma von Weyl: Sei $\emptyset \neq \Omega \subseteq I\!R^n$ offen, und $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ erfülle die „schwache Laplace-Gleichung"

$$\int_\Omega u \triangle v \, dx = 0 \qquad \forall\, v \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1}$$

Zeigen Sie: $u \in C^\infty_{loc}(\Omega)$ und $\triangle u \equiv 0$ auf Ω. (5)

Hinweis: Testen Sie (1) mittels Glättungen $v_\epsilon(x) := \int_\Omega \phi_\epsilon(x-y)\, v(y)\, dy$, mit einer Dirac-Folge $\phi_\epsilon(x) := \epsilon^{-n}\, \phi(x/\epsilon)$ und einem symmetrischen Glättungs-Kern $\phi \in C^\infty_0(B_1(0))$, und kombinieren Sie anschliessend das Fundamentallemma der Variationsrechnung mit den Cauchy-Abschätzungen $\| \; h \; \|_{C^k(B_1(0))} \leq C(n,k) \;\; \| \; h \; \|_{L^\infty(B_2(0))}$ und der Mittelwertformel für eine beliebige auf $\overline{B_2(0)}$ harmonische Funktion h.

AUFGABE 7:

Es sei $X = L^1(A)$ für eine $\mathcal{L}^n$-meßbare Menge $A \subseteq I\!R^n$ mit $\mathcal{L}^n(A) > 0$ und $f(x) :=\| \; x \; \|_{L^1(A)}$. Zeigen Sie, dass f in $u \in L^1(A)$ mit $\mathcal{L}^n([u=0]) = 0$ Gâteaux-differenzierbar, jedoch in $u \in L^1(A)$ mit $\mathcal{L}^n([u=0]) > 0$ nicht Gâteaux-differenzierbar ist, und geben Sie im ersten Fall die Gâteaux-Ableitung $\partial f_v(u)$ explizit an. Zeigen Sie desweiteren, dass f an keiner Stelle $u \in L^1(A)$ Fréchet-differenzierbar ist. (5)

Hinweis für den zweiten Aufgabenteil: Wählen Sie für ein $u \in L^1(A)$ mit $\mathcal{L}^n([u>0]) > 0$ ein $M > 0$, sodass $\mathcal{L}^n([0 < u < M]) > 0$, und betrachten Sie als Störungsfunktion $v := -2M\chi_B$ für $\mathcal{L}^n$-meßbares $B \subseteq [0 < u < M]$.

Abgabetermin ist Freitag, der 06.05.11.