Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
PD Dr. Ruben Jakob

06.05.11

Nichtlineare Funktionalanalysis
SS 2011
3.Übung

AUFGABE 9:
Es sei X ein Banachraum. Eine Funktion $\gamma :]a,b[\to X, a < b$, ist Fréchet-differenzierbar in $t \in]a,b[$ genau dann, wenn

$$\lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} =: x \in X$$

existiert, und in diesem Fall gilt für die Ableitung

$$\gamma'(t).h = hx.$$

AUFGABE 10:
Es sei $X = L^p(A), 1 < p < \infty$ für eine Lebesgue-meßbare Menge $A \subseteq I\!R^n$ mit $\mathcal{L}^n(A) > 0$ und $f(x) := \| x \|$. Zeigen Sie, daß f an jeder Stelle $u \in L^p(A) - \{0\}$ Fréchet-differenzierbar ist.
(Hinweis: Zeigen Sie zuerst, daß $f^p(u) = \| u \|^p_{L^p(\Omega)}$ Fréchet-differenzierbar ist, und beweisen Sie für die Funktion $\varphi(t) := |t|^p$ die Ungleichung $0 \leq \varphi(t+s) - \varphi(t) - \varphi'(t)s \leq 2p\varphi(s)$.)

AUFGABE 11:
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset I\!R^n$ offen und konvex, $0 < \alpha < \beta \leq 1$ und $\varphi \in C^{1,\beta}_{loc}(I\!R)$. Berechnen Sie die Fréchet-Ableitung der Abbildung $f : C^{2,\alpha}(\Omega) \to C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit

$$f(u) := -\Delta u + \varphi(u).$$

AUFGABE 12:
Es seien X, Y, Z Banachräume und $B : X \times Y \to Z$ eine stetige, bilineare Abbildung. Zeigen Sie, dass B überall Fréchet-differenzierbar ist mit

$$DB(x,y).(u,v) = B(u,y) + B(x,v).$$

(Hinweis: Verwenden Sie $\| B(x,y) \| \leq \| B \| \| x \| \| y \|$.)

Abgabetermin ist Freitag, 13.05.11.