Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
PD Dr. Ruben Jakob
Dr. Amos Koeller

20.05.11

Nichtlineare Funktionalanalysis
SS 2011
5.Übung

AUFGABE 16:(Mittelwertsatz)
Seien X, Y Banachräume, $U \subseteq X$ konvex und $F \in C^1(U, Y)$.

1. Zeigen Sie, dass
$$||F(x) - F(y)|| \leq \left(\max_{0 \leq t \leq 1} ||dF((1-t)x + ty)|| \right) ||x - y||$$
für alle $x, y \in U$, und

2. Zeigen Sie, dass falls
$$||F(x) - F(y)|| \leq M||x - y||$$
für alle $x, y \in U$,
$$\sup_{x \in U} ||dF(x)|| \leq M \quad \text{gilt.}$$

Schließen Sie daraus weiter, dass für $f \in C^1(U, Y)$ f eine konstante Abbildung genau dann ist, wenn $df = 0$. Zeigen Sie insbesondere für $f_1, f_2 \in C^1(U, Y)$ mit $df_1 = df_2$, dass $f_1 - f_2$ eine konstante Abbildung ist.
(Hinweis: Verwenden Sie Proposition 2.3)

AUFGABE 17:
X, Y seien Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$ offen und $x_0 \in U$. Weiter sei $f \in C^1(U, Y)$ mit $Df(x_0)(X) = Y$ und $ker\ Df(x_0)$ sei in X komplementierbar, d.h. es existiert ein abgeschlossener Unterraum $W \subseteq X$ mit $X = ker\ Df(x_0) \oplus W$. Zeigen Sie, dass ein $\rho > 0$ existiert, so dass $f|_{B_\rho(x_0)}$ eine offene Abbildung ist.
(Hinweis: Verwenden Sie den Satz über implizite Funktionen.)

AUFGABE 18:
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset I\!R^n$ offen und $1 \leq p < \infty$, $q = \frac{p}{p-1}$. Zeigen Sie, daß die Einbettung $T : L^q(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)^*$ mit
$$T\varphi.u := \int_\Omega \varphi u \quad \text{für } \varphi \in L^q(\Omega),\ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$
eine kompakte Abbildung ist.
(Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Rellich.)

AUFGABE 19:
Zeigen Sie, daß der gleichmäßige Limes kompakter Abbildungen wieder kompakt ist. Verwenden Sie dies, um zu zeigen, daß für $f \in C^1(U, Y)$, X, Y Banachräume, $\emptyset \neq U \subseteq X$, die Ableitung

$$Df(x) : X \to Y$$

für jedes $x \in U$ eine kompakte linearer Abbildung ist.

Abgabetermin ist Freitag, 27.05.11.