Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
PD Dr. Ruben Jakob

03.06.11

Nichtlineare Funktionalanalysis
SS 2011
7.Übung

AUFGABE 25:
Es seien $S, T : l^2 \to l^2$ linear, stetig mit $Se_i := e_{i+1}, Te_i := e_{i-1}$ für $i \geq 1$ und $e_i := (\delta_{ij})_{j \in I\!N}$ für $i \geq 0$. Zeigen Sie: S, T sind Fredholmoperatoren mit $ind(S) = -1, ind(T) = 1$.

AUFGABE 26:
Es sei $T : l^2 \to l^2$ linear stetig mit $Te_i = \lambda_i e_i, e_i = (\delta_{ij})_{j \in I\!N} \in l^2$ und $\liminf_{i \to \infty} |\lambda_i| > 0$. Zeigen Sie: T ist ein Fredholmoperator mit $ind(T) = 0$.
(Hinweis: Schreiben Sie $T = I - K$ mit einem Isomorphismus I und kompaktem K und verwenden Sie Aufgabe 24.)

AUFGABE 27:
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset I\!R^n$ offen und

$$B(u) := -\partial_i(a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u) + c_j\partial_j u + du : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow I\!R$$

für $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ der Differentialoperator in Divergenzform aus Beispiel 2.4 (aus dem Vorlesungs-Skript), also mit $a_{ij}, b_i, c_j, d \in L^\infty(\Omega)$ und

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq c_0 \mid \xi \mid^2 \quad \text{für } \xi \in I\!R^n \text{ und } x \in \Omega,$$

wobei $c_0 > 0$. Desweiteren sei $C : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)^*$ definiert durch $C(u).v := \int_\Omega uv\, dx$.
i) Kombinieren Sie zunächst die Garding-Ungleichung (2.9) und den Satz von Lax-Milgram aus Beispiel 2.4, um zu zeigen, dass für hinreichend grosse $t \in I\!R$ die Störung $B + tC$ ein Isomorphismus von $W_0^{1,2}(\Omega)$ auf $W_0^{1,2}(\Omega)^*$ ist und somit $B : W_0^{1,2}(\Omega) \longrightarrow W_0^{1,2}(\Omega)^*$ eine Fredholm-Abbildung mit Index(B)= 0 ist. (Siehe hierzu auch Aufgabe 18)
ii) Desweiteren liefert das schwache Maximum-Prinzip, dass unter der zusätzlichen Bedingung $\int_\Omega b_i\partial_i v + dv\, dx \geq 0$, für jedes $v \in W_0^{1,2}(\Omega)$ mit $v \geq 0$, die homogene Gleichung $B(u) = 0$ nur die triviale Lösung $u \equiv 0$ haben kann. Folgern Sie hieraus und aus Teil (i), dass unter dieser zusätzlichen Bedingung B sogar ein Isomorphismus von $W_0^{1,2}(\Omega)$ auf $W_0^{1,2}(\Omega)^*$ ist und insbesondere die „schwache" elliptische Gleichung

$$B(u) = \varphi + \mathrm{div}\psi \quad \text{in } \Omega$$

für beliebige $\varphi \in L^2(\Omega)$ und $\psi \in L^2(\Omega, I\!R^n)$ genau eine Lösung $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ besitzen muss.

AUFGABE 28:
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset I\!R^n$ offen mit glattem Rand und $0 < \alpha < 1$, $a_{ij}, b_i, c \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ mit

$$a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0 \quad \text{für } \xi \in I\!R^n - \{0\} \text{ und } x \in \overline{\Omega}.$$

Wir betrachten den linearen Differentialoperator $L : C^{2,\alpha,0}(\Omega) := \{u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \mid u = 0 \text{ auf } \partial\Omega\ \} \to C^{0,\alpha}(\Omega)$ definiert durch

$$Lu := -a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu.$$

Zeigen Sie, daß L eine Fredholm-Abbildung mit Index 0 ist. Schließen Sie daraus die Fredholm-Alternative: Die Gleichung

$$Lu = \varphi$$

besitzt eine eindeutige Lösung $u \in C^{2,\alpha,0}(\Omega)$ für alle $\varphi \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ genau dann, wenn die homogene Gleichung, d.h. im Falle $\varphi \equiv 0$, nur die triviale Lösung hat.
(Hinweis: Verwenden Sie Proposition 5.4)

Abgabetermin ist Freitag, 10.06.11.