Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
PD Dr. Ruben Jakob

10.06.11

Nichtlineare Funktionalanalysis
SS 2011
8.Übung

AUFGABE 29: (Lineare elliptische Differentialgleichung, Calderon-Zygmund-Theorie)
Es sei $\emptyset \neq \Omega \subset\subset I\!R^n$ offen mit glattem Rand und $1 < p < \infty$, $a_{ij} \in C^0(\overline{\Omega})$, b_i, $c \in L^\infty(\Omega)$ mit

$$\begin{gathered} a_{ij}\xi_i\xi_j \geq c_0|\xi|^2, \\ |a_{ij}(x) - a_{ij}(y)| \leq \omega(|x-y|), \\ \| a_{ij}, b_i, c \|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Lambda, \end{gathered}$$

mit $c_0 > 0, \Lambda < \infty$ und ω ein gegebener Stetigkeitsmodul, d.h. $\lim_{t\downarrow 0}\omega(t) = 0$. Aus der Regularitätstheorie elliptischer Differentialgleichungen, ist bekannt, daß für $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, welches die lineare elliptische Differentialgleichung in Nichtdivergenzform

$$-a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu = \varphi \quad \text{fast überall in } \Omega \tag{1}$$

mit $\varphi \in L^p(\Omega)$ erfüllt, die folgenden Calderon-Zygmund-Abschätzungen

$$\| u \|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C(\Omega, p, c_0, \Lambda, \omega)(\| \varphi \|_{L^p(\Omega)} + \| u \|_{L^p(\Omega)})$$

gelten, siehe [GT] Theorem 9.14. u heißt starke Lösung von (1). Kombiniert man die Calderon-Zygmund-Abschätzungen, siehe [GT] Lemma 9.16, mit dem Alexandroffschen-Maximumprinzip, siehe [GT] Theorem 9.5, so folgt für $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, daß

$$L(u) := -a_{ij}\partial_{ij}u + b_i\partial_i u + cu \equiv 0 \Rightarrow u \equiv 0,$$

falls $c \geq 0$. Zeigen Sie damit, daß (1) für $c \geq 0$ eine eindeutige Lösung in $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ hat und der Differentialoperator $L:\ W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ ein Isomorphismus ist.

AUFGABE 30:
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$ offen, nichtleer und $f \in C^0(\overline{\Omega}, I\!R^n)$. Zeigen Sie folgende Aussagen.

(i) Die Abbildung $(y \mapsto deg(f, \Omega, y))$ ist konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $I\!R^n - f(\partial\Omega)$.

(ii) Für $x_0 \in I\!R^n$ gilt

$$deg(f(\,.+x_0), \Omega - x_0, y) = deg(f, \Omega, y).$$

AUFGABE 31:
Zeigen Sie

$$deg(t \mapsto |t+1| - 1,]-3, 1[, 0) = 0$$

und schließen Sie daraus

$$deg(t \mapsto -t,]-1,1[, 0) = -1.$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Homotopieinvarianz in Proposition 7.3 und Proposition 7.1.).

AUFGABE 32:

Zeigen Sie für $P := diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_n), \lambda_i > 0$, und

$$D_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\ \varphi & \sin\ \varphi \\ -\sin\ \varphi & \cos\ \varphi \end{pmatrix},$$

daß

$$deg(P, B_1(0), 0) = 1 \quad \text{und} \quad deg(D_\varphi, B_1(0), 0) = 1.$$

(Hinweis: Verwenden Sie die Homotopieinvarianz in Proposition 7.3.).

Abgabetermin ist Freitag, 24.06.11.