Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Professor Dr. R. Schätzle
PD Dr. Ruben Jakob

24.06.11

Nichtlineare Funktionalanalysis
SS 2011
9.Übung

AUFGABE 33:
Es sei $\Omega = \cup_{i=1}^N]a_i, b_i[\subset\subset I\!R$ eine endliche Vereinigung offener, endlicher disjunkter Intervalle $]a_i, b_i[, i = 1, \ldots, N$. Zeigen Sie für $f \in C^0(\overline{\Omega}, I\!R)$ und $y \in I\!R - f(\partial\Omega)$, daß

$$deg(f, \Omega, y) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} (sgn(f(b_i) - y) - sgn(f(a_i) - y)).$$

AUFGABE 34:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C} \cong I\!R^2$ ein beschränktes Gebiet und $f \in C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{C})$ eine auf $\partial\Omega$ nichtverschwindende, holomorphe Funktion, welche in Ω Nullstellen von höchstens erster Ordnung besitze. Berechnen Sie den Abbildungsgrad $\deg(f, \Omega, 0)$ in Abhängigkeit von der Anzahl der einfachen Nullstellen von f !

AUFGABE 35: (Abbildungsgrad und Windungszahl)
Es sei $B_1(0) \subseteq I\!R^2 \cong \mathbb{C}$ und $f \in C^0(\overline{B_1(0)}, I\!R^2)$ mit $f(z) = z^m$ für $z \in \partial B_1(0)$ und $m \in \mathbb{Z}$ gegeben. Zeigen Sie, daß

$$deg(f, B_1(0), 0) = m.$$

(Hinweis: Verwenden Sie Proposition 7.3 und Aufgabe 34, indem Sie $\tilde{f}(re^{i\varphi}) := r^{|m|}e^{im\varphi}$ für $m \neq 0$ setzen und beachten, daß jeder Punkt aus $B_1(0) \setminus \{0\}$ ein regulärer Wert von $\tilde{f}$ ist.)
Nun sei $\gamma : S^1 = \partial B_1(0) \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Weg in $\mathbb{C}$ mit $0 \notin \gamma(S^1)$. Die Windungszahl $Ind_\gamma(0)$ von γ bezüglich 0 ist wie folgt definiert: Es gibt $\omega \in C^0(I\!R, I\!R)$ mit

$$\frac{\gamma(e^{i\varphi})}{|\gamma(e^{i\varphi})|} = e^{i\omega(\varphi)}.$$

Dann ist

$$Ind_\gamma(0) := \frac{1}{2\pi}(\omega(2\pi) - \omega(0)) \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie, daß für jede stetige Erweiterung $f \in C^0(\overline{B_1(0)}, I\!R^2)$ von γ gilt:

$$deg(f, \Omega, 0) = Ind_\gamma(0).$$

AUFGABE 36: (Satz vom Igel)
Es sei $\Omega \subset\subset I\!R^n$ offen, $0 \in \Omega$ und

$$f : \partial\Omega \to I\!R^n - \{0\}$$

stetig. Zeigen Sie, daß für ungerades n ein $x \in \partial\Omega$ und ein $\lambda \neq 0$ existieren mit

$$f(x) = \lambda x.$$

(Hinweis: Betrachten Sie die Homotopien $f_t(x) := (1-t)f(x) + \sigma t x$ für $\sigma = \pm 1$.)
Zeigen Sie weiter, daß ein stetiges, tangentiales, nichtverschwindendes Vektorfeld an $S^{n-1} := \partial B_1^n(0)$ genau dann existiert, wenn n gerade ist.

Abgabetermin ist Freitag, 01.07.11.