Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

SS 10
28.04.2010
PD Dr. R. Jakob

1. Übungsblatt zur Vorlesung
Algebraische Topologie I

Aufgabe 1:

Es sei $0 \longrightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz der Kettenkomplexe $(C', \partial_{C'})$, (C, ∂_C) und $(C'', \partial_{C''})$ und $\partial_* : H_q(C'') \longrightarrow H_{q-1}(C')$ (für jedes $q \in \mathbb{Z}$) der durch $\partial_*([z'']) := [f^{-1}(\partial_C(g^{-1}(z'')))]$ gegebene Verbindungshomomorphismus zwischen den Homologien von C'' und C'.
Man beweise nun, dass die somit konstruierbare (unendlich) lange Homologie-Sequenz

$$\ldots \xrightarrow{f_*} H_q(C) \xrightarrow{g_*} H_q(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(C') \xrightarrow{f_*} H_{q-1}(C) \xrightarrow{g_*} H_{q-1}(C'') \ldots$$

exakt ist, also dass in jedem Grad Bild(f_*)=Kern(g_*), Bild(g_*)=Kern(∂_*) und Bild(∂_*)=Kern(f_*) gilt. (5)

Aufgabe 2:

Es seien (C, C', ∂_C) und (D, D', ∂_D) Paare von Kettenkomplexen, d.h. C'_q bzw. D'_q seien Untergruppen von C_q bzw. D_q mit $\partial_C(C'_q) \subset C'_{q-1}$ bzw. $\partial_D(D'_q) \subset D'_{q-1}$, für jedes $q \in \mathbb{Z}$.

a) Sind die kurzen Sequenzen $0 \longrightarrow C' \xrightarrow{i} C \xrightarrow{p} C/C' \longrightarrow 0$ und $0 \longrightarrow D' \xrightarrow{i} D \xrightarrow{p} D/D' \longrightarrow 0$ exakt ? Und wenn ja, wie sind in diesen Spezialfällen der in Aufgabe 1 behandelten Situation die Verbindungshomomorphismen ∂_* von $H_*(C/C')$ nach $H_{*-1}(C')$ bzw. von $H_*(D/D')$ nach $H_{*-1}(D')$ explizit gegeben ? (3)

b) Sei nun ein Kettenhomomorphismus $f : (C, C', \partial_C) \longrightarrow (D, D', \partial_D)$ zwischen diesen Paaren gegeben, d.h. mit $f(C'_q) \subset D'_q$, für jedes q, sowie $f \circ \partial_C = \partial_D \circ f$. Man mache sich zunächst klar, dass ein solches f durch die naheliegenden Vorschriften $f_*([c]) := [f(c)]$, für $c \in C$ bzw. $c \in C'$, sowie $f_*([c + C']) := [f(c) + D']$ wohldefinierte Homomorphismen von $H_*(C)$ nach $H_*(D)$ bzw. von $H_*(C')$ nach $H_*(D')$ sowie von $H_*(C/C')$ nach $H_*(D/D')$ liefert. Anschliessend zeige man (anhand des Aufgabenteils (a)), dass ausserdem die beiden Verkettungen $f_* \circ \partial_* = \partial_* \circ f_* : H_*(C/C') \longrightarrow H_{*-1}(D')$ übereinstimmen, was Profis die ,,Natürlichkeit" von ∂_* (gegenüber ,,induzierter Homomorphismen" f_*) nennen. Kommutiert somit das folgende Diagramm der beiden durch f_* verbundenen langen Homologie-Sequenzen von (C, C', ∂_C) und (D, D', ∂_D) ?

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\ldots H_{q+1}(C/C') & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(C') & \xrightarrow{i_*} & H_q(C) & \xrightarrow{p_*} & H_q(C/C') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(C') & \xrightarrow{i_*} & \ldots \\
f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & f_* \downarrow & & \\
\ldots H_{q+1}(D/D') & \xrightarrow{\partial_*} & H_q(D') & \xrightarrow{i_*} & H_q(D) & \xrightarrow{p_*} & H_q(D/D') & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(D') & \xrightarrow{i_*} & \ldots .
\end{array}$$

Man nennt dieses Diagramm die ,,Homologie-Leiter" zu $f : (C, C', \partial_C) \longrightarrow (D, D', \partial_D)$.
(3)

Aufgabe 3:

Man beweise das berühmte ,,Fünfer-Lemma": Sei also das folgende kommutative (!) Diagramm

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \xrightarrow{\psi_1} & A_2 & \xrightarrow{\psi_2} & A_3 & \xrightarrow{\psi_3} & A_4 & \xrightarrow{\psi_4} & A_5 \\ f_1 \downarrow & & f_2 \downarrow & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow & & f_5 \downarrow \\ B_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & B_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & B_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & B_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & B_5 \end{array}$$

aus zwei exakten (!) ,,Zeilen" und fünf ,,Spalten" gegeben, von dem wir annehmen, dass die vertikalen Homomorphismen f_1, f_2, f_4, f_5 Isomorphismen seien. So ist zu beweisen, dass auch der Homomorphismus der mittleren Spalte f_3 ein Isomorphismus ist. (4)

Abgabe: Am 10.05.10, bitte !