Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

SS 10
07.05.2010
PD Dr. R. Jakob

2. Übungsblatt zur Vorlesung
Algebraische Topologie I

Aufgabe 4:

Die direkte Summe $C \oplus D$ zweier Kettenkomplexe (C, ∂^C) und (D, ∂^D) ist gradweise durch $(C \oplus D)_q := C_q \oplus D_q$ definiert.
Wird diese mittels des Randoperators $\partial^{C\oplus D}(c,d) := (\partial^C(c), \partial^D(d))$ zu einem Kettenkomplex ? Und falls dies der Fall sein sollte, so kläre man, ob tatsächlich der Homologie-Funktor H_* mit der Bildung der direkten Summe kommutiert, also ob einfach $H_q(C \oplus D) \cong H_q(C) \oplus H_q(D)$ mittels der (angeblich isomorphen) Zuordnung $[(c,d)] \longmapsto ([c],[d])$, für beliebige q-Zykeln $c \in C_q$ und $d \in D_q$ und $\forall\, q \in \mathbb{Z}$, gilt. (4)

Aufgabe 5:

Es seien nun C' und C'' Teilkomplexe eines gegebenen Kettenkomplexes (C, ∂^C), d.h. also C'_q bzw. C''_q seien Untergruppen von C_q mit $\partial^C(C'_q) \subset C'_{q-1}$ bzw. $\partial^C(C''_q) \subset C''_{q-1}$, für jedes $q \in \mathbb{Z}$. Aus C' und C'' bilden wir dessen „innere Summe" $C' + C''$, dessen Elemente per Definition gerade die Summen $c' + c''$, für $c' \in C'$ und $c'' \in C''$, seien.

a) Sind $(C' + C'', \partial^C)$ und $(C' \cap C'', \partial^C)$ wieder Teilkomplexe von (C, ∂^C) ? (1)

b) Zeigen Sie, dass $0 \longrightarrow C' \cap C'' \xrightarrow{i} C' \oplus C'' \xrightarrow{p} C' + C'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen ist, wenn $i(c) := (c, -c)$ und $p(c', c'') := c' + c''$ bezeichnen. Man wende auf diese nun das Resultat von Aufgabe 1 an, stelle also die entsprechende lange Homologie-Sequenz auf und gebe den entsprechenden Verbindungshomomorphismus $\partial_* : H_q(C' + C'') \longrightarrow H_{q-1}(C' \cap C'')$ explizit an. (3)

c) Setzen wir nun noch voraus, dass die Inklusion $j : C' + C'' \hookrightarrow C$ einen Isomorphismus $j_* : H_q(C' + C'') \xrightarrow{\cong} H_q(C)$ (für jedes q) induziert, so sollte man bei Beachtung des Resultats von Aufgabe 4 auf die folgende lange exakte Sequenz

$$\ldots \xrightarrow{\nu} H_{q+1}(C) \xrightarrow{\Delta} H_q(C' \cap C'') \xrightarrow{\mu} H_q(C') \oplus H_q(C'') \xrightarrow{\nu} H_q(C) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(C' \cap C'') \ldots$$

geführt werden, auf die sogenannte Mayer-Vietoris-Sequenz zum Paar C', C'' in C. Man gebe deren Homomorphismen Δ, μ, ν als Kompositionen aus $\partial_*, i_*, p_*, j_*$ und dem Isomorphismus von Aufgabe 4 explizit an. (2)

Aufgabe 6:

a) Zeigen Sie, dass für teilerfremde, natürliche Zahlen $n, m \geq 2$, also im Falle $\mathrm{ggT}(n, m) = 1$, die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/nm$ zur direkten Summe $\mathbb{Z}/n \oplus \mathbb{Z}/m$ mittels der Abbildung $f : x + mn\mathbb{Z} \longmapsto (x + n\mathbb{Z}, x + m\mathbb{Z})$ isomorph ist. (3)
Hinweis: Zeigen Sie zuerst die Injektivität des Homomorphismus' f mit Hilfe der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen und vergleichen Sie anschliessend die Anzahl der Elemente von $\mathrm{Bild}(f)$ mit der Mächtigkeit von $\mathbb{Z}/n \oplus \mathbb{Z}/m$!

b) Ist also beispielsweise $\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/15$ zu $\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/5$ isomorph ? Und ist $\mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/21$ zu $\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/7$ isomorph ? Was kann man schon anhand dieser Beispiele über die Definierbarkeit eines ,,Ranges" bzw. einer ,,Dimension" endlicher abelscher Gruppen aussagen ? (2)

Abgabe: Am 17.05.10, bitte !