Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

SS 10
15.05.2010
PD Dr. R. Jakob

3. Übungsblatt zur Vorlesung
Algebraische Topologie I

Aufgabe 7:

a) Sind die abelschen Gruppen $G := \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \mid 4a+3b+5c=0\}$ bzw. $H := \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 \mid 5a-2b+8c=0\}$ frei ? Oder sind ihre Torsionsuntergruppen $\mathrm{Tor}(G)$, $\mathrm{Tor}(H)$ nicht-trivial ? Man gebe also entweder eine Basis und den Rang von G bzw. H oder mindestens ein Element endlicher Ordnung aus G bzw. H an ! (3)

b) Nun untersuche man die abelsche Gruppe $G := \{(a,b,c,d) \in \mathbb{Z}^4 \mid 6a+4b=0, 3c+7d=0\}$. Man entscheide wieder, ob G frei ist oder nicht, indem man entweder eine Basis (und somit $\mathrm{Rang}(G)$) oder ein Element endlicher Ordnung von G angebe ! (3)

Aufgabe 8:

Es seien nun C' und C'' Teilkomplexe eines gegebenen Kettenkomplexes (C, ∂^C), d.h. also C'_q bzw. C''_q seien Untergruppen von C_q mit $\partial^C(C'_q) \subset C'_{q-1}$ bzw. $\partial^C(C''_q) \subset C''_{q-1}$, für jedes $q \in \mathbb{Z}$. Aus C' und C'' bilden wir dessen „innere Summe" $C' + C''$, dessen Elemente per Definition gerade die Summen $c' + c''$, für $c' \in C'$ und $c'' \in C''$, seien.

a) Sind $(C' + C'', \partial^C)$ und $(C' \cap C'', \partial^C)$ wieder Teilkomplexe von (C, ∂^C) ? (1)

b) Zeigen Sie, dass $0 \longrightarrow C' \cap C'' \xrightarrow{i} C' \oplus C'' \xrightarrow{p} C' + C'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen ist, wenn $i(c) := (c, -c)$ und $p(c', c'') := c' + c''$ bezeichnen. Man wende auf diese nun das Resultat von Aufgabe 1 an, stelle also die entsprechende lange Homologie-Sequenz auf und gebe den entsprechenden Verbindungshomomorphismus $\partial_* : H_q(C' + C'') \longrightarrow H_{q-1}(C' \cap C'')$ explizit an. (3)

c) Setzen wir nun noch voraus, dass die Inklusion $j : C' + C'' \hookrightarrow C$ einen Isomorphismus $j_* : H_q(C' + C'') \xrightarrow{\cong} H_q(C)$ (für jedes q) induziert, so sollte man bei Beachtung des Resultats von Aufgabe 4 auf die folgende lange exakte Sequenz

$$\ldots \xrightarrow{\nu} H_{q+1}(C) \xrightarrow{\Delta} H_q(C' \cap C'') \xrightarrow{\mu} H_q(C') \oplus H_q(C'') \xrightarrow{\nu} H_q(C) \xrightarrow{\Delta} H_{q-1}(C' \cap C'') \ldots$$

geführt werden, auf die sogenannte Mayer-Vietoris-Sequenz zum Paar C', C'' in C. Man gebe deren Homomorphismen Δ, μ, ν als Kompositionen aus $\partial_*, i_*, p_*, j_*$ und dem Isomorphismus von Aufgabe 4 explizit an. (2)

Aufgabe 9:

a) Zeigen Sie, dass für teilerfremde, natürliche Zahlen $n, m \geq 2$, also im Falle $\mathrm{ggT}(n, m) = 1$, die zyklische Gruppe $\mathbb{Z}/nm$ zur direkten Summe $\mathbb{Z}/n \oplus \mathbb{Z}/m$ mittels der Abbildung $f : x + mn\mathbb{Z} \longmapsto (x + n\mathbb{Z}, x + m\mathbb{Z})$ isomorph ist. (3)
Hinweis: Zeigen Sie zuerst die Injektivität des Homomorphismus' f mit Hilfe der Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung natürlicher Zahlen und vergleichen Sie anschliessend die Anzahl der Elemente von $\mathrm{Bild}(f)$ mit der Mächtigkeit von $\mathbb{Z}/n \oplus \mathbb{Z}/m$!

b) Ist also beispielsweise $\mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/15$ zu $\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/4 \oplus \mathbb{Z}/5$ isomorph ? Und ist $\mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/21$ zu $\mathbb{Z}/3 \oplus \mathbb{Z}/5 \oplus \mathbb{Z}/7$ isomorph ? Was kann man schon anhand dieser Beispiele über die Definierbarkeit eines ,,Ranges" bzw. einer ,,Dimension" endlicher abelscher Gruppen aussagen ? (2)

Abgabe: Am 24.05.10, bitte !