Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

SS 10
21.05.2010
PD Dr. R. Jakob

4. Übungsblatt zur Vorlesung
Algebraische Topologie I

Aufgabe 10:

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die lineare Abbildung ϵ_q^0 den q-dimensionalen Standard-Simplex $\triangle_q$ vermöge der Vorschrift $\epsilon_q^0(x_0, x_1, \ldots, x_q) := x_0e^1 + x_1e^2 + \ldots + x_qe^{q+1}$, für $(x_0, x_1, \ldots, x_q) \in \triangle_q$ – also für $x_j \geq 0$ mit $\sum_{j=0}^q x_j = 1$ – in die 0-te Seite $\triangle_q^0$ des $(q+1)$-dimensionalen Standard-Simplex $\triangle_{q+1}$ einbettet. Wir können also die Punkte von $\triangle_{q+1} = \{x_0e^0+x_1e^1+\ldots+x_{q+1}e^{q+1} \mid x_j \geq 0, \sum_{j=0}^{q+1} x_j = 1\}$, auch durch $(1-t)e^0+t\epsilon_q^0(x_0, x_1, \ldots, x_q)$, für $t \in [0,1]$ und $(x_0, x_1, \ldots, x_q) \in \triangle_q$, eindeutig darstellen. Man nennt daher $\triangle_{q+1}$ den Kegel über $\triangle_q^0$ mit Spitze e^0 und schreibt dies als $\triangle_{q+1} = e^0 * \triangle_q^0 \equiv e^0 * \epsilon_q^0$. Hieran knüpfen wir nun die Konstruktion des Kegels $P * \sigma : \triangle_{q+1} \longrightarrow A$ über einem singulären q-Simplex $\sigma : \triangle_q \to A$ in einer konvexen Teilmenge A eines $\mathbb{R}^n$ mit beliebig gewählter Spitze $P \in A$, nämlich mittels der Vorschrift $P * \sigma((1-t)e^0 + t\epsilon_q^0(x_0, x_1, \ldots, x_q)) := (1-t)P + t\sigma(x_0, x_1, \ldots, x_q)$, für $t \in [0,1]$ und $(x_0, x_1, \ldots, x_q) \in \triangle_q$.

a) Man skizziere die Abbildungsweise von $P*\sigma : \triangle_{q+1} \longrightarrow A$ für $q = 2$! Wie erhalten wir nun aus unserer Kegelkonstruktion einen Homomorphismus $P* : S_q(A) \longrightarrow S_{q+1}(A)$? Und inwiefern ist für dessen Wohldefiniertheit die Konvexität von A wichtig ? Reichte es für die Definierbarkeit von $P*$ bereits aus, nur die Sternförmigkeit von A bezüglich der festgewählten Spitze $P \in A$ zu fordern ? (2)

b) Sei nun $c = \sum_{\sigma \in \Lambda_q(A)} n_\sigma \sigma$ eine beliebige q-Kette in $S_q(A)$, $q > 0$. Man leite die Formel $\partial_{q+1}(P * c) = c - P * \partial_q(c)$ her, wobei wir $\partial_q(\sigma) := \sum_{j=0}^q (-1)^j \sigma \circ \epsilon_{q-1}^j$ für singuläre q-Simplizes $\sigma \in \Lambda_q(A)$ in der Vorlesung definierten. (4)

Aufgabe 11:

Sei $B \subset A$ ein Paar konvexer Teilmengen eines $\mathbb{R}^n$.

a) Man berechne zunächst mittels des Resultats aus Aufgabe 10,(b) die singuläre Homologie von A ! Gilt etwa $H_q(A) = \{0\}$ für jedes $q > 0$? (2)

b) Nun überlege man sich, welche Bedingung ein $c \in S_q(A, B)$ erfüllen muss, um ein q-Zyklus in $S_q(A, B)$ zu sein, also um eine Homologie-Klasse in $H_q(A, B)$ zu repräsentieren, und ob man die Formel aus Aufgabe 10,(b) auch dazu verwenden könnte, um $H_q(A, B)$ für jedes $q > 0$ zu berechnen. Gilt etwa wieder $H_q(A, B) = \{0\}$ für jedes $q > 0$? (2)

c) Könnte man vielleicht sofort aus dem Resultat des Aufgabenteils (a) (in Anwendung auf A und B separat) die „relative Homologie" $H_q(A, B)$ bei Zuhilfenahme der langen exakten Homologie-Sequenz des Paares (A, B) herleiten, ohne sich in die Definition von $S_q(A,B)$ und $H_q(A,B)$ hineinzuknieen und ohne nochmals die Formel aus Aufgabe 10,(b) zu verwenden ? (2)

Abgabe: Erst am 02.06.10 in der Übung, bitte !