Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

SS 10
28.05.2010
PD Dr. R. Jakob

5. Übungsblatt zur Vorlesung
Algebraische Topologie I

Aufgabe 12:

Es seien $B \subset A \subset X$ ein Tripel topologischer Räume und $S.(B), S.(A), S.(X)$ die zugehörigen singulären Kettenkomplexe.

a) Wie und in welcher Reihenfolge müssen die Quotienten-Kettenkomplexe $S.(X,A)$, $S.(X,B)$ und $S.(A,B)$ aufeinander abgebildet werden, damit aus ihnen eine kurze exake Sequenz von Kettenkomplexen entsteht ?
(Hinweis: Man benötigt nur eine naheliegende Inklusion und Projektion.) (2)

b) Wie sieht somit die aus dieser resultierende lange exakte Homologie-Sequenz, die sogenannte Homologie-Sequenz des Tripels (X,A,B), aus ? Man gebe den entsprechenden Verbindungshomomorphismus $\partial_*^{(X,A,B)}$ explizit an und versuche diesen als Komposition des Verbindungshomomorphismus' $\partial_*^{(X,A)}$ aus der Homologie-Sequenz des Paares (X,A) und einer bestimmten induzierten Abbildung aus der Homologie-Sequenz des Paares (A,B) zu schreiben ! (3)

Aufgabe 13:

Wir betrachten den q-dimensionalen Standard-Simplex $\triangle_q$, $q > 0$, und teilen dessen Rand in seine 0-te Seite $\triangle_{q-1}^0$ und in die Vereinigung A_{q-1} seiner restlichen q Seiten $\triangle_{q-1}^1, \ldots, \triangle_{q-1}^q$ auf.

a) Man benutze zunächst die orthogonale Projektion P von A_{q-1} auf $\triangle_{q-1}^0$, um die Homologie-Gruppen $H_n(A_{q-1})$ von A_{q-1}, für $n > 0$, zu berechnen ! Ist diese Projektion P ein Homöomorphismus, also eine stetige Abbildung mit stetiger Umkehrabbildung ? Und kann man demnach ein Resultat des letzten Übungsblattes verwenden ? (2)

b) Man kombiniere nun das Resultat aus (a) mit der langen Homologie-Sequenz des Paares $(\triangle_q, A_{q-1})$, um auch noch die relativen Homologie-Gruppen $H_n(\triangle_q, A_{q-1})$, für $n > 1$, zu berechnen. Anschliessend verwende man die Homologie-Sequenz des Tripels $(\triangle_q, \partial\triangle_q, A_{q-1})$, um eine Isomorphie zwischen $H_{n+1}(\triangle_q, \partial\triangle_q)$ und $H_n(\partial\triangle_q, A_{q-1})$, für $n > 1$, festzustellen ! Welcher Homomorphismus liefert uns konkret diese Isomorphie ? (3)

c) Nun betrachten wir eine stetige Abbildung von Raumpaaren $f : (\triangle_{q-1}, \partial\triangle_{q-1}) \longrightarrow (\partial\triangle_q, A_{q-1})$ mit der Eigenschaft, dass deren Einschränkung auf $\triangle_{q-1} \setminus \partial\triangle_{q-1}$ ein

Homöomorphismus $f : \triangle_{q-1} \setminus \partial\triangle_{q-1} \xrightarrow{\cong} \partial\triangle_q \setminus A_{q-1}$ ist. Identifiziert man nun in $\triangle_{q-1}$ dessen Rand $\partial\triangle_{q-1}$ zu einem Punkt, so erhält man einen zur $(q-1)$-Sphäre $\mathbb{S}^{q-1}$ homöomorphen Raum $\triangle_{q-1}/\partial\triangle_{q-1}$, den sogenannten Quotientenraum aus $\triangle_{q-1}$ und $\partial\triangle_{q-1}$. Ebenso ist der Quotientenraum aus $\partial\triangle_q$ und A_{q-1} zur $(q-1)$-Sphäre $\mathbb{S}^{q-1}$ homöomorph. Insgesamt liefert somit das obige f einen Homöomorphismus $\bar{f} : \triangle_{q-1}/\partial\triangle_{q-1} \xrightarrow{\cong} \partial\triangle_q/A_{q-1}$. Man überlege sich nun, warum die Projektionen P bzw. Q von $(\triangle_{q-1}, \partial\triangle_{q-1})$ auf $\triangle_{q-1}/\partial\triangle_{q-1}$ bzw. von $(\partial\triangle_q, A_{q-1})$ auf $\partial\triangle_q/A_{q-1}$ Isomorphismen $P_* : H_*(\triangle_{q-1}, \partial\triangle_{q-1}) \xrightarrow{\cong} H_*(\triangle_{q-1}/\partial\triangle_{q-1})$ und $Q_* : H_*(\partial\triangle_q, A_{q-1}) \xrightarrow{\cong} H_*(\partial\triangle_q/A_{q-1})$ induzieren und warum (bei Erinnerung an $\bar{f}$!) somit auch das f einen Isomorphismus $f_* : H_*(\triangle_{q-1}, \partial\triangle_{q-1}) \xrightarrow{\cong} H_*(\partial\triangle_q, A_{q-1})$ induziert ! Welche bemerkenswerte Isomorphie erhalten wir somit zusammen mit dem Resultat des Aufgabenteils (b) ? (5)

Abgabe: Am 09.06.10 in der Übung, bitte !