Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

SS 10
04.06.2010
PD Dr. R. Jakob

6. Übungsblatt zur Vorlesung
Algebraische Topologie I

Aufgabe 14:

Wie in Aufgabe 13 betrachten wir den q-dimensionalen Standard-Simplex $\triangle_q$, $q \geq 0$, zusammen mit seinem Rand $\partial\triangle_q$, welcher für $q = 0$ per Definition leer sei. Als Resultat der Aufgabe 13 (c) sollte die Isomorphie $H_{n+1}(\triangle_q, \partial\triangle_q) \cong H_n(\triangle_{q-1}, \partial\triangle_{q-1})$, zumindest $\forall\, n > 1$ und für jedes $q > 0$, gefolgert werden, und wir nehmen nun an, dass diese Isomorphie auch noch für $n = 1$ gelte.

a) Dies motiviert eine Berechnung von $H_1(\triangle_q, \partial\triangle_q)$, für jedes $q \geq 0$. Man zeige mittels einer exakten Analyse der beiden Homomorphismen des Abschnitts $H_1(\triangle_q, \partial\triangle_q) \xrightarrow{\partial_*} H_0(\partial\triangle_q) \xrightarrow{i_*} H_0(\triangle_q)$ aus der exakten (!) Homologie-Sequenz des Paares $(\triangle_q, \partial\triangle_q)$, dass $H_1(\triangle_1, \partial\triangle_1) \cong \mathbb{Z}$ und ansonsten $H_1(\triangle_q, \partial\triangle_q) = \{0\}$ für jedes $q \neq 1$ gilt. Hierfür muss man sich zunächst von $H_0(\partial\triangle_q) \cong \mathbb{Z}$ für jedes $q > 1$ und $H_0(\partial\triangle_1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ überzeugen und anschliessend die Wirkungsweisen von ∂_* und i_* verstehen. (3)

b) Man folgere somit, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ $H_n(\triangle_n, \partial\triangle_n) \cong \mathbb{Z}$ und ansonsten $H_n(\triangle_q, \partial\triangle_q) = \{0\}$ für jedes $q \in \mathbb{N}_0$ mit $q \neq n$ gilt. (2)

c) In Kombination mit der langen Homologie-Sequenz des Paares $(\triangle_q, \partial\triangle_q)$ ermittele man aus dem Teil (b) die Homologie-Gruppen $H_n(\mathbb{S}^q)$, für jedes Paar $(n, q) \in \mathbb{N}^2$, wofür man sich zunächst klarmache, dass die $\mathbb{S}^q$ zu $\partial\triangle_{q+1}$ homöomorph ist. (2)

Aufgabe 15:

Wir bezeichnen im Folgenden den Volltorus $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ mit VT und die Vollbrezel $VT\sharp VT$ (mit 2 Löchern) mit VB_2. Hierbei sei also $\mathbb{D}^2$ die abgeschlossene Einheits-Kreisscheibe und $M\sharp N$ die ,,zusammenhängende Summe" zweier Mannigfaltigkeiten M, N, also anschaulich deren gegenseitige ,,Verklebung".

a) Man gebe zunächst eine (naheliegende) Retraktion $r : VT \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \{0\}$ an, mit deren Hilfe sich die Homotopie-Äquivalenz zwischen VT und der $\mathbb{S}^1$ beweisen lässt, sodass sich also $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$ als ein Deformationsretrakt des Volltorus' VT erweist. Wie lauten somit die Homologie-Gruppen $H_n(VT)$, für jedes $n \in \mathbb{N}$, im Hinblick auf das Resultat von Aufgabe 14 (c) ? (3)

b) Nehmen wir nun zu wissen an, dass die Vollbrezel VB_2 zum Bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ zweier Kreise, also anschaulich zur Spur einer gezeichneten ,,8", homotopie-äquivalent ist. Man berechne somit $H_1(VB_2)$, indem man $H_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ direkt anhand der Definition der ersten singulären Homologie-Gruppe durch explizite Angabe zweier ihrer Erzeuger beweist. Man charakterisiere hierzu diejenigen singulären 1-Simplizes $\sigma_1 : \triangle_1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$, welche 1-Zykli in $S_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ sind, und finde heraus, welche von diesen wohl die Erzeuger der Homologie-Gruppe $H_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ repräsentieren ! Warum können diese erzeugenden Homologie-Klassen keine endlichen Ordnungen haben ? (3)

Abgabe: Erst am 21.06.10 in der Vorlesung, bitte !