Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

SS 10
11.06.2010
PD Dr. R. Jakob

7. Übungsblatt zur Vorlesung
Algebraische Topologie I

Aufgabe 16:

Wie in Aufgabe 15 (b) betrachten wir das Bouquet $\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ zweier Kreise, also die topologische Summe $\mathbb{S}^1 \coprod \mathbb{S}^1$ zweier Kopien der $\mathbb{S}^1$, in der jeweils der Punkt $1 \equiv (1,0) \in \mathbb{S}^1$ aus beiden Kopien miteinander identifiziert werde. Sei weiterhin $\sigma : \triangle_1 \longrightarrow \mathbb{S}^1$ der durch $\sigma((1-t)\, e^0 + t\, e^1) := \exp(2\pi i t)$ explizit gegebene Vertreter des Erzeugers „$[\mathbb{S}^1]$" von $H_1(\mathbb{S}^1)$.

a) Sei nun $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ diejenige Abbildung, die durch $f(z) := (z^2, 1)$, für $z \in \mathbb{S}^1$ mit $\Im(z) \geq 0$, und $f(z) := (1, z^2)$, für $z \in \mathbb{S}^1$ mit $\Im(z) \leq 0$, gegeben sei. Man gebe den durch f induzierten Homomorphismus f_* explizit an, indem man dessen Wirkung $f_*([\mathbb{S}^1]) = [f \circ \sigma]$ auf den Erzeuger $[\mathbb{S}^1]$ als Linearkombination zweier Erzeuger von $H_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$ ausdrücke. Welche (zu eben diesen beiden Erzeugern gehörenden) Koordinaten hat somit $f_*([\mathbb{S}^1])$ in $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$? (3)

b) Allgemeiner gebe man nun (nach obiger Wahl zweier Erzeuger von $H_1(\mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1)$) die Koordinaten von $f_*([\mathbb{S}^1])$ für diejenige Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ an, die durch $f(z) := (z^{2n}, 1)$, für $z \in \mathbb{S}^1$ mit $\Im(z) \geq 0$, und $f(z) := (1, z^{2m})$, für $z \in \mathbb{S}^1$ mit $\Im(z) \leq 0$, gegeben sei, wobei n und m zwei beliebige ganze Zahlen bezeichnen. Wie wirkt demnach der induzierte Homomorphismus f_* exakt ? (3)

Aufgabe 17:

Als Verallgemeinerung des Bouquets zweier Kreise definieren wir nun das Bouquet $\mathbb{S}^q \vee \mathbb{S}^p$ zweier beliebiger Sphären als den Quotientenraum $\mathbb{S}^q \coprod \mathbb{S}^p / x_1 \sim x_2$, welcher also aus der topologischen Summe $\mathbb{S}^q \coprod \mathbb{S}^p$ entsteht, indem man einen fest gewählten Punkt $x_1 \in \mathbb{S}^q$ mit einem anderen fixierten Punkt $x_2 \in \mathbb{S}^p$ identifiziert.

a) Man beweise zunächst mit Hilfe des Homotopie- und des Ausschneidungssatzes, dass (für jedes $n \in \mathbb{N}$) $H_n(\mathbb{S}^q \vee \mathbb{S}^p)$ zur direkten Summe $H_n(\mathbb{S}^q) \oplus H_n(\mathbb{S}^p)$ isomorph ist ! (4)

b) Zusammen mit dem Ergebnis der Aufgabe 14 (c) berechne man somit $H_6(\mathbb{S}^3 \vee \mathbb{S}^7)$, $H_4(\mathbb{S}^4 \vee \mathbb{S}^8)$ und $H_5(\mathbb{S}^5 \vee \mathbb{S}^5)$! (1)

c) Schliesslich konstruiere man explizit einen Erzeuger von $H_4(\mathbb{S}^4 \vee \mathbb{S}^8)$. Hierzu überzeuge man sich zunächst davon, dass man sich einen Erzeuger von $H_n(\mathbb{S}^n)$ (für jedes $n \in \mathbb{N}$) verschaffen kann, indem man die Wirkungsweise des (isomorphen) Verbindungshomomorphismus' $\partial_* : H_{n+1}(\triangle_{n+1}, \partial\triangle_{n+1}) \xrightarrow{\cong} H_n(\partial\triangle_{n+1})$ auf den Erzeuger $[id_{\triangle_{n+1}}]$

von $H_{n+1}(\triangle_{n+1}, \partial\triangle_{n+1})$ analysiert und die zu untersuchende n-Kette $\partial_*([id_{\triangle_{n+1}}]) \in H_n(\partial\triangle_{n+1})$ mittels eines (naheliegenden) Homöomorphismus' von $\partial\triangle_{n+1}$ auf die $\mathbb{S}^n$,,bearbeitet". (3)

Abgabe: Erst am 28.06.10 in der Vorlesung, bitte !