Universität Duisburg - Essen
Institut für Mathematik
Campus Duisburg

SS 10
02.07.2010
PD Dr. R. Jakob

8. Übungsblatt zur Vorlesung
Algebraische Topologie I

Aufgabe 18:

Die $\mathbb{S}^3$ ist der Rand des vierdimensionalen Balles $\mathbb{D}^4$, welcher wiederum zum Produkt $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$ homöomorph ist, sodass wir eine Homöomorphie von der $\mathbb{S}^3$ auf den Rand des Produktes $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2$ erhalten.

a) Wieso folgt nun, dass die $\mathbb{S}^3$ zur Vereinigung zweier Volltori $VT_1, VT_2 \subset \partial(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{D}^2)$ homöomorph ist, deren Durchschnitt gerade aus dem Torus $T := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ besteht ? (2)

b) Man benutze diese in (a) gefundene Homöomorphie, um mittels der Mayer-Vietoris-Sequenz und der bereits bekannten Homologie der $\mathbb{S}^3$ und der $\mathbb{S}^1$ die 1. und 2. Homologie-Gruppe des Torus, genauer $H_1(T) \cong \mathbb{Z}^2$ und $H_2(T) \cong \mathbb{Z}$, zu berechnen. (4)

Aufgabe 19:

Wir betrachten nun die Abbildung $f : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, die durch $f(z, w) := (z^a\, w^b, z^c\, w^d)$ für ganze Zahlen a, b, c, d mit $ad - bc = 1$ gegeben sei.

a) Seien nun $\sigma^j : \triangle_1 \longrightarrow \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ die durch $\sigma^1((1-t)\, e^0 + t\, e^1) := (\exp(2\pi i t), 1)$ und $\sigma^2((1-t)\, e^0 + t\, e^1) := (1, \exp(2\pi i t))$ gegebenen singulären Simplizes in $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Warum vertreten diese zwei linear unabhängige Erzeuger von $H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$? Man gebe nun einerseits die beiden singulären Simplizes $f \circ \sigma^j$ explizit als Abbildungen an und drücke andererseits ihre Homologie-Klassen $[f \circ \sigma^j] \equiv f_*([\sigma^j])$, $j = 1, 2$, als Linearkombinationen der gewählten Erzeuger $[\sigma^1]$, $[\sigma^2]$ von $H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ aus ! Durch welche Matrix M lässt sich somit der induzierte Homomorphismus f_* bzgl. der Basis $[\sigma^1]$, $[\sigma^2]$ von $H_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1)$ darstellen ? Ist $M \in \mathrm{Gl}(2, \mathbb{Z})$ oder sogar $\in \mathrm{Sl}(2, \mathbb{Z})$? (4)

b) Ist somit f_* für jede Wahl der ganzen Zahlen a, b, c, d mit $ad - bc = 1$ ein Isomorphismus ? Und folgt hieraus bereits, dass jedes solche f ein Homöomorphismus sein muss ? (2)

c) Verkleben wir nun die beiden Volltori $VT_1 := \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$ und $VT_2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^2$ entlang deren gemeinsamen Randes $T \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ mittels solch eines Homöomorphismus' $f : T \xrightarrow{\cong} T$, so erhalten wir gerade deren Amalgam $VT_1 \cup_f VT_2 := (VT_1 \coprod VT_2)/(x \sim f(x))$ zu f. Für welche Wahl der ganzen Zahlen a, b, c, d ist nun $VT_1 \cup_f VT_2$ sicherlich zur $\mathbb{S}^3$ homöomorph ? Gilt $VT_1 \cup_f VT_2 \cong \mathbb{S}^3$ bei jeder Wahl der ganzen Zahlen a, b, c, d mit $ad - bc = 1$? (4)