24.4.10

Singuläre (Ko-)Homologie-Theorie

§0 Einführung und Ausblick

Motivierendes Grundproblem:

Wie kann man möglichst schnell und einfach feststellen, ob zwei topologische Räume X, Y nicht homotopie-äquivalent sind, d.h. nicht ineinander stetig deformiert werden können, d.h. daß es keine stetigen Abbildungen $f: X \longrightarrow Y$ und $g: Y \longrightarrow X$ mit $f \circ g \simeq id_Y$, $g \circ f \simeq id_X$ geben kann?

Lösungs-Strategie:

Man konstruiere einen homotopie-invarianten Funktor $H_*: \underset{\shortparallel}{Top^2} \longrightarrow \underset{\shortparallel}{\mathcal{G}\mathcal{A}\mathcal{G}}$ von der

Kategorie der „Paare topologischer Räume" in die Kategorie der „graduierten abelschen Gruppen",

d. h. jedes Diagramm
$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[d, "f|_A"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd}$$
in Top^2 wird von

$$\Downarrow H_*$$

H_* überführt in die Folge von Abbildungen

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] H_*(X,A) \arrow[d, "f_* = H_*(f)"'] & = & H_0(X,A), \arrow[d, "H_0(f)"] & H_1(X,A), \arrow[d, "H_1(f)"] & H_2(X,A), \arrow[d, "H_2(f)"] & \ldots, & H_n(X,A), \arrow[d, "H_n(f)"] & \ldots \\ H_*(Y,B) & = & H_0(Y,B), & H_1(Y,B), & H_2(Y,B), & \ldots, & H_n(Y,B), & \ldots \end{tikzcd}$$

zwischen abelschen Gruppen $H_k(X,A)$ und $H_k(Y,B)$, $\forall k \in \mathbb{N}$, den sogenannten „singulären Homologiegruppen" von (X,A) bzw. (Y,B), sodaß H_* zwei homotope Abbildungen $f_1 \underset{\Downarrow}{\simeq} f_2 : X \longrightarrow Y$ als gleich erachtet: $\quad H_*(f_1) = H_*(f_2)$.

Sind also X und Y homotopie-äquivalent, also $\quad f \circ g \simeq id_Y$, $g \circ f \simeq id_X$, so muß

$$\Downarrow H_*$$

$$f_* \circ g_* = id_{H_*(Y)}, \quad g_* \circ f_* = id_{H_*(X)}$$ gelten,

also daß alle Gruppen $H_k(X,A)$ zu $H_k(Y,B)$ vermöge f_* bzw. g_* isomorph sind!

Konstruktion und geometrische Bedeutung von H_*

(Zunächst für $A=\emptyset=B$) X sei fester, topol. Raum.

$$\Delta_q := \left\{ x \in \mathbb{R}^{q+1} \,\middle|\, x = \sum_{i=0}^{q} \lambda_i e_i \,,\ 0 \le \lambda_i \le 1,\ \sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 1 \right\}$$

bezeichne den Standard-Simplex der Dimension q.

Wir betrachten die Menge Λ_q aller stetigen Abb. $\sigma_q : \Delta_q \longrightarrow X$, der sogen. „singulären Simplizes in X", und die von Λ_q erzeugte freie abelsche Gruppe $S_q(X) := \bigoplus_{\sigma_q \in \Lambda_q} \mathbb{Z}[\sigma_q] \equiv \mathbb{Z}[\Lambda_q]$, $\forall q \in \mathbb{N}_0$. Jedes Element $c \in S_q(X)$ ist also eine Linearkombination $c_1 \sigma_q^1 + c_2 \sigma_q^2 + \ldots + c_m \sigma_q^m$ aus endlich vielen singulären Simplizes mit eindeutigen Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbb{Z}$.

$S_q(X)$ ist „riesig" und zunächst uninteressant!

Gibt es eine „kanonische Verbindung" zwischen $S_q(X)$ und $S_{q-1}(X)$?

<u>Antwort</u>: Ja! Wir betrachten die Einbettungen $\delta^i_{q-1}: \Delta_{q-1} \longrightarrow \Delta^i_{q-1} \subset \Delta_q$ des Standard-Simplex Δ_{q-1} der Dimension $q-1$ auf die i-te Seite Δ^i_{q-1} des Standard-Simplexe Δ_q der Dim. q und bilden den sogenannten „Randoperator" $\partial_q : S_q(X) \to S_{q-1}(X)$ indem wir $\partial_q(\sigma_q) := \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (\sigma_q \circ \delta^i_{q-1})$ auf der Basis Δ_q von $S_q(X)$ definieren. Man schränkt also σ_q auf die Seiten Δ^i_{q-1}, $i=0,\dots,q$, von Δ_q ein und summiert die singulären $(q-1)$-Simplizes $(\sigma_q \circ \delta^i_{q-1}) \in \Delta_{q-1}$ mit den Koeffizienten $(-1)^i$ zum Element $\partial_q(\sigma_q) \in S_{q-1}(X)$

Wir erhalten einen sogenannten „Kettenkomplex“

$$S_{q+1}(X) \xrightarrow[\partial_{q+1}]{} S_q(X) \xrightarrow[\partial_q]{} S_{q-1}(X) \xrightarrow[\partial_{q-1}]{} S_{q-2}(X) \rightarrow$$

mit $\boxed{\partial_q \circ \partial_{q+1} \equiv 0}$, $\forall q \in \mathbb{N}_0$!

$$\Rightarrow \text{Bild}(\partial_{q+1}) \subset \text{Kern}(\partial_q), \quad \forall q \in \mathbb{N}_0.$$

$$\rightsquigarrow \text{Bilde } H_q(X) := \frac{\text{Kern}(\partial_q)}{\text{Bild}(\partial_{q+1})}$$

Ist $f: X \to Y$ stetige Abbildung, so erhält man durch $S(f)(\sigma_q) := f \circ \sigma_q : \Delta_q \to Y$ zunächst eine „kommutative Leiter“

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & S_{q+1}(X) \arrow[r, "\partial_{q+1}"'] \arrow[d, "S(f)"] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & S_q(X) \arrow[r, "\partial_q"'] \arrow[d, "S(f)"] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & S_{q-1}(X) \arrow[r, "\partial_{q-1}"'] \arrow[d, "S(f)"] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & S_{q-2}(X) \arrow[d, "S(f)"] \\
{} \arrow[r] & S_{q+1}(Y) \arrow[r, "\partial_{q+1}"'] & S_q(Y) \arrow[r, "\partial_q"'] & S_{q-1}(Y) \arrow[r, "\partial_{q-1}"'] & S_{q-2}(Y)
\end{tikzcd}$$

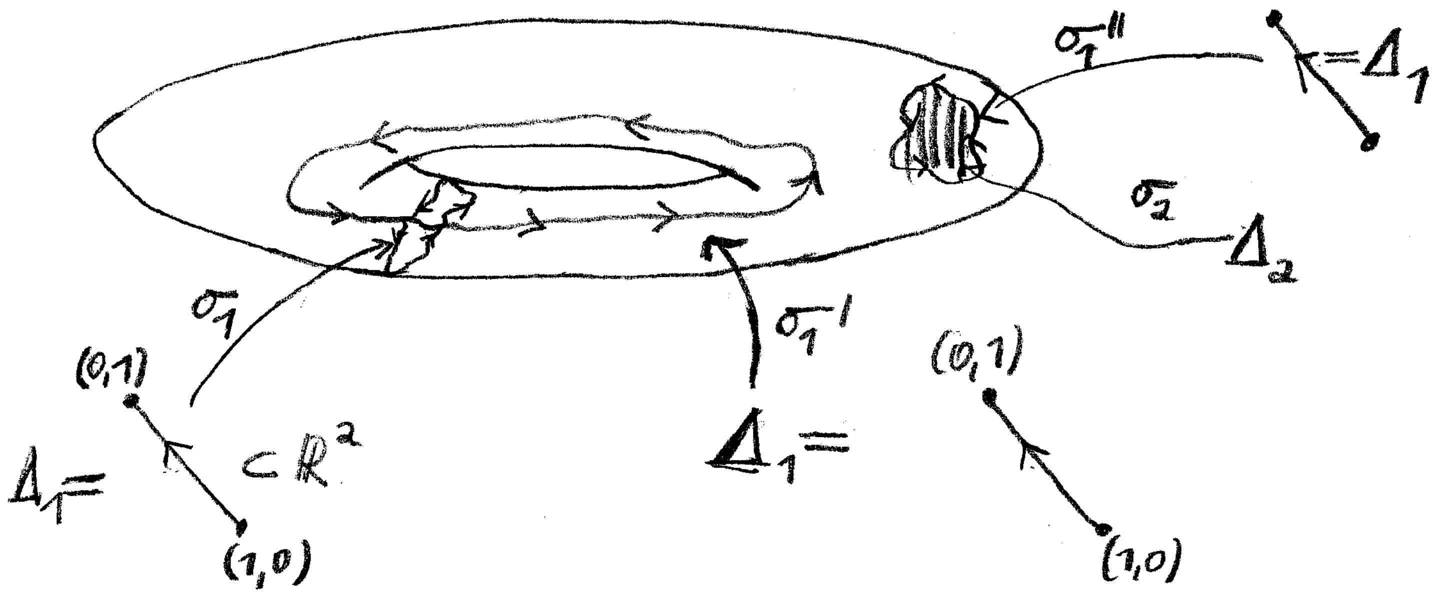
und darf daher $H_q(f) : H_q(X) \to H_q(Y)$ einfach durch $H_q(f)([\sigma_q]) := [f \circ \sigma_q]$

definieren, $\forall q \in \mathbb{N}_0$!

Die Elemente von $H_q(X)$ sind Restklasen $[c_q]$ von „q-Ketten" $c_q \in S_q(X)$ mit $\partial_q(c_q) = 0$ wobei $[c_q] = [c_q']$ gilt, falls

$$c_q' = c_q + \partial_{q+1}(c_{q+1}), \text{ für ein } c_{q+1} \in S_{q+1}(X).$$

Anschauung für $X = S^1 \times S^1 = $ Torus:



σ_1 und σ_1' erfüllen offenbar $\partial_1(\sigma_1) = 0 = \partial_1(\sigma_1')$, da sie die Endpunkte von Δ_1 auf denselben Punkt in X abbilden. Desweiteren kann es keine 2-Kette $c_2 = \sum_{i=1}^{m} k^i \sigma_2^i \in S_2(X)$ mit

$\partial_2(c_2) = \sigma_1$ oder $\partial_2(c_2) = \sigma_1'$ geben, jedoch

gilt offenbar $\partial_2(\sigma_2) = \sigma_1''$.

Somit sind $[\sigma_1]$, $[\sigma_1']$ nicht-triviale

Erzeuger von $H_1(X) = \dfrac{\ker(\partial_1)}{\mathrm{Bild}(\partial_2)}$, während

$[\sigma_1''] = 0$ ist. Desweiteren kann es keine

2-Kette $c_2 \in S_2(X)$ mit $\sigma_1' = \sigma_1 + \partial_2(c_2)$ geben,

sodaß $[\sigma_1] \neq [\sigma_1']$ ist.

Somit sind alle Elemente in $\ker(\partial_1)$, welche

nicht ohnehin in $\mathrm{Bild}(\partial_2)$ liegen, von der

Form $k\,\sigma_1 + k'\,\sigma_1' + \partial_2(c_2)$, für $k, k' \in \mathbb{Z}$ und

ein $c_2 \in S_2(X)$, also

$$H_1(X) = \mathbb{Z}[\sigma_1] \oplus \mathbb{Z}[\sigma_1'] \cong \mathbb{Z}^2$$

= ganz-zahliges Gitter in $\mathbb{C}$

Schließlich sieht man leicht, daß man durch eine günstig gewählte Triangulierung

$\sigma_2^1, \ldots, \sigma_2^n : \Delta_2 \longrightarrow X$ von X, also mit

$X = \bigcup_{k=1}^{n} \mathrm{Bild}(\sigma_2^k)$, eine 2-Kette

$c_2 = \sigma_2^1 + \sigma_2^2 + \ldots + \sigma_2^n \in S_2(X)$ erhält,

welche anhand der Orientierungen ihrer Bestandteile $\sigma_2^1, \ldots, \sigma_2^n$ und anhand der „Randlosigkeit" von X gerade $\partial_2(c_2) = 0$ erfüllt. Somit sind alle Elemente in $\ker(\partial_2)$, die nicht in $\mathrm{Bild}(\partial_3)$ liegen, von der Form

$$k\, c_2 + \partial_3(c_3), \text{ für } k \in \mathbb{Z} \text{ und } c_3 \in S_3(X)$$

$$\Rightarrow H_2(X) = \ker(\partial_2) / \mathrm{Bild}(\partial_3) = \mathbb{Z}[c_2] \cong \mathbb{Z}$$

Ähnlich sieht man für ein „Brezel" $T \# T =: B_2$

$H_1(B_2) \cong \mathbb{Z}^4$ und $H_2(B_2) \cong \mathbb{Z}$