1.5.10

§1 Homologie von Kettenkomplexen

Def. 1.1

a) Ein „Kettenkomplex" $C_\bullet = (C_q, \partial_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ ist eine Folge $\ldots \xrightarrow{\partial_{q+2}} C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \xrightarrow{\partial_{q-1}} \ldots$ abelscher Gruppen C_q und Homomorphismen ∂_q, den sogen. „Randoperatoren", mit

$$\boxed{\partial_q \circ \partial_{q+1} \equiv 0 \,, \ \forall q \in \mathbb{Z}} \qquad (*)$$

Die Elemente von C_q nennt man „q-Ketten" und speziell diejenigen von $\ker(\partial_q)$ „q-Zykeln" und von $\mathrm{Bild}(\partial_{q+1})$ „q-Ränder".

b) Wegen der Bedingung $(*)$ dürfen wir die abelsche Faktorgruppe $H_q(C_\cdot) := \dfrac{\ker(\partial_q)}{\mathrm{Bild}(\partial_{q+1})}$ die sogen. q-te Homologie-Gruppe von $C_\cdot$ bilden.

Zwei „Homologieklassen" $[z], [z'] \in H_q(C.)$ stimmen also genau dann überein, wenn $z - z'$ ein q-Rand ist: $z - z' = \partial_{q+1}(c)$, $c \in C_{q+1}$, d. h. falls z zu z' „homolog" ist.

Def. 1.2

Ein „Kettenmorphismus" $f.$ von einem Kettenkomplexe $C.$ in einen weiteren $D.$ ist eine Folge $f_q : C_q \longrightarrow D_q$, $q \in \mathbb{Z}$, von Homomorphismen mit $\boxed{\partial_q^D \circ f_q = f_{q-1} \circ \partial_q^C \ , \forall q \in \mathbb{Z}}$. $f.$ läßt also das Diagramm

$$(**) \qquad \begin{array}{ccccccccc} \ldots & C_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}^C} & C_q & \xrightarrow{\partial_q^C} & C_{q-1} & \xrightarrow{\partial_{q-1}^C} & \ldots \\ & \downarrow{\scriptstyle f_{q+1}} & & \downarrow{\scriptstyle f_q} & & \downarrow{\scriptstyle f_{q-1}} & & \\ \ldots & D_{q+1} & \xrightarrow{\partial_{q+1}^D} & D_q & \xrightarrow{\partial_q^D} & D_{q-1} & \xrightarrow{\partial_{q-1}^D} & \ldots \end{array}$$

vollständig kommutieren.

Anhand von (**) induziert jeder Kettenmorphismus $f_. : C_. \to D_.$ eine Folge $\underbrace{(f_*)_q}_{\equiv H_q(f)} : H_q(C_.) \to H_q(D_.)$ durch die einfache Vorschrift $(f_*)_q([z]) := [f_q(z)]$, denn falls $z \in \ker(\partial_q^C)$, so folgt aus (**):

$$\partial_q^D(f_q(z)) = f_{q-1}(\underbrace{\partial_q^C(z)}_{=0}) = 0, \text{ also } f_q(z) \in \ker(\partial_q^D)$$

und falls $[z] = [z']$, also $z - z' = \partial_{q+1}^C(\bar{z})$, so folgt $f_q(z) - f_q(z') = f_q(\partial_{q+1}^C(\bar{z})) = \partial_{q+1}^D(f_{q+1}(\bar{z}))$, also $[f_q(z)] = [f_q(z')]$.

Offenbar gelten $H_q(f \circ \tilde{f}) = H_q(f) \circ H_q(\tilde{f})$

sowie $H_q(id_{C_.}) = id_{H_q(C_.)}$, $\forall q \in \mathbb{Z}$,

sodaß wir einen kovarianten Funktor

$H_* : \partial\mathcal{AG} \to \mathcal{GAG}$ von der Kategorie der Kettenkomplexe abelscher Gruppen in die Kategorie der Folgen abelscher Gruppen konstruiert haben.

Def. 1.3

a) Wir nennen eine Folge $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ von zwei Homomorphismen f, g abelscher Gruppen „exakt bei B", falls $\mathrm{Bild}(f) = \ker(g)$ gilt.

b) Eine Folge der Form $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ heiße eine „kurze exakte Sequenz", falls sie bei A, B und C exakt ist, also falls f injektiv und g surjektiv ist und $\mathrm{Bild}(f) = \ker(g)$ gilt.

c) Ein Kettenkomplex $\dots C_{q+1} \xrightarrow{\partial_{q+1}} C_q \xrightarrow{\partial_q} C_{q-1} \dots$ heiße eine „lange exakte Sequenz", falls er bei jedem C_q exakt ist, also falls eben „exakt" $\mathrm{Bild}(\partial_{q+1}) = \ker(\partial_q)$ und nicht nur

$\mathrm{Bild}(\partial_{q+1}) \subset \ker(\partial_q)$, $\forall q \in \mathbb{Z}$, erfüllt ist.

$(C_\cdot, \partial_\cdot^c)$ ist also genau dann ein „exakter Kettenkomplex" oder eine lange exakte Sequenz, falls $H_q(C_\cdot) = 0$, $\forall q \in \mathbb{Z}$, gilt!

<u>Proposition 1.1</u>

Sei nun $0 \longrightarrow C_\cdot' \xrightarrow{f} C_\cdot \xrightarrow{g} C_\cdot'' \longrightarrow 0$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen, so ist die Folge $H_*(C_\cdot') \xrightarrow{f_*} H_*(C_\cdot) \xrightarrow{g_*} H_*(C_\cdot'')$ bei $H_*(C_\cdot)$ exakt, d. h. $H_q(C_\cdot') \xrightarrow{H_q(f)} H_q(C_\cdot) \xrightarrow{H_q(g)} H_q(C_\cdot'')$ ist bei $H_q(C_\cdot)$, $\forall q \in \mathbb{Z}$, exakt.

<u>Beweis</u>:

Aus $g \circ f = 0$ folgt $g_* \circ f_* = (g \circ f)_* = 0$, also $\mathrm{Bild}(f_*) \subset \ker(g_*)$. ✓

„$\supset$": Sei $[z] \in \ker(g_*)$, also $g(z) - 0 = \partial^{c''}(x'')$.

Nun nehme man ein $x \in g^{-1}(x'')$ (g ist surjektiv)

$$\Rightarrow \quad g(z - \partial^C(x)) = \partial^{C''}(x'') - (g \circ \partial^C)(x)$$
$$= \partial^{C''}(x'') - \partial^{C''} \circ g(x) = \partial^{C''}(\underbrace{x'' - g(x)}_{=0}) = 0$$

Aus der Voraussetzung $\mathrm{Bild}(f) = \ker(g)$ folgt somit die Existenz einer Kette $z' \in C'$ mit

$$f(z') = z - \partial^C(x), \quad (*)$$

$$\Rightarrow \quad (f \circ \partial^{C'})(z') = (\partial^C \circ f)(z') = \partial^C(z - \partial^C(x)) = 0,$$

denn z repräsentiert eine Homologie-Klasse, muß also $\partial^C(z) = 0$ erfüllen, und $\partial^C \circ \partial^C = 0$.

Da f nach Vorauss. injektiv ist

$\Rightarrow$ $\partial^{C'}(z') = 0$, z' repräsentiert also die Homologie-Klasse $[z'] \in H_*(C'_\cdot)$ und liefert

$$f_*([z']) = [f(z')] \underset{(*)}{=} [z - \partial^C(x)] = [z],$$

also in der Tat $[z] \in \mathrm{Bild}(f_*)$ $\square$

Diese hübsche Vererbung der Exaktheit von

$$0 \longrightarrow C'_\bullet \xrightarrow{\;f\;} C_\bullet \xrightarrow{\;g\;} C''_\bullet \longrightarrow 0$$

zumindest auf die „mittleren Positionen" des folgenden Schemas auf Homologie-Niveau:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H_{q+1}(C'_\bullet) \arrow[r, "f_*"] & H_{q+1}(C_\bullet) \arrow[r, "g_*"] & H_{q+1}(C''_\bullet) \arrow[dll, dashed, "\partial_*"'] \\
& H_q(C'_\bullet) \arrow[r, "f_*"] & H_q(C_\bullet) \arrow[r, "g_*"] & H_q(C''_\bullet) \arrow[dll, dashed, "\partial_*"'] \\
& H_{q-1}(C'_\bullet) \arrow[r, "f_*"] & H_{q-1}(C_\bullet) \arrow[r, "g_*"] & H_{q-1}(C''_\bullet) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

motiviert die Frage nach der „kanonischen Konstruierbarkeit" eines sogen. „Verbindungs-homomorphismus" $\partial_* : H_q(C''_\bullet) \longrightarrow H_{q-1}(C'_\bullet)$, sodaß das obige Schema an jeder Position exakt wird, sich also in eine lange exakte (Homologie-)Sequenz verwandelt!

Konstruktion von ∂_*:

Wir wählen eine Homol. kl. $[x''] \in H_q(C_\cdot'')$.

Da g surjektiv ist, existiert ein $x \in C_q$ mit $g(x) = x''$ und es gilt $g(\partial^c(x)) = \partial^{c''}(g(x)) = \partial^{c''}(x'') = 0$.

Wegen $\text{Bild}(f) = \ker(g)$ existiert somit ein $x' \in C'_{q-1}$ mit $f(x') = \partial^c(x)$, welches anhand der Injektivität von f eindeutig ist.

Weiterhin ist $f(\partial^{c'}(x')) = \partial^c(f(x')) = \partial^c \circ \partial^c(x) = 0$ und somit auch $\partial^{c'}(x') = 0$.

Also repräsentiert x' eine Homologie-Klasse $[x'] \in H_{q-1}(C'_\cdot)$, und wir setzen $\partial_*([x'']) = [x']$.

Um die Wohldefiniertheit von ∂_* zu garantieren, betrachten wir zwei q-Ketten $x_1, x_2 \in C_q$ mit $[g(x_1)] = [x''] = [g(x_2)]$ und hoffen, daß wir

$[f^{-1}(\partial^c(x_1))] = [f^{-1}(\partial^c(x_2))]$ bzw.

$[f^{-1}(\partial^c(x_1 - x_2))] = 0$ zeigen können.

Aus $[g(x_1-x_2)]=0 \Rightarrow g(x_1-x_2)=\partial^{C''}(z'')$

für ein $z''\in C''_{q+1}$.

Da g surjektiv ist, existiert ein $y\in C_{q+1}$ mit

$z''=g(y)$, also $g(x_1-x_2)=(\partial^{C''}\circ g)(y)=(g\circ\partial^{C})(y)$

$\Rightarrow x_1-x_2-\partial^{C}(y)\in \ker(g)=\text{Bild}(f)$

$\Rightarrow \exists!\, y'\in C'_q$ mit $f(y')=x_1-x_2-\partial^{C}(y)$

$$\Rightarrow f\circ\partial^{C'}(y')=\partial^{C}\circ f(y')=\partial^{C}(x_1-x_2-\partial^{C}(y))$$
$$=\partial^{C}(x_1-x_2)$$

$\Leftrightarrow f^{-1}(\partial^{C}(x_1-x_2))=\partial^{C'}(y')$, was zu zeigen war!

<u>Proposition 1.2</u> (Natürlichkeit und Exaktheit von ∂_*)

1) Falls das folgende Diagramm zweier kurzer exakter Sequenzen von Kettenkomplexen

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & C'_\cdot \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Phi'_\cdot"] & C_\cdot \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\Phi_\cdot"] & C''_\cdot \arrow[r] \arrow[d, "\Phi''_\cdot"] & 0 \\
0 \arrow[r] & D'_\cdot \arrow[r, "F"] & D_\cdot \arrow[r, "G"] & D'_\cdot \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

kommutiert, so kommutiert auch

$$\begin{tikzcd}
H_q(C''_\cdot) \arrow[r, "\partial_*^C"] \arrow[d, "\Phi''_*"'] \arrow[dr, phantom, "="] & H_{q-1}(C'_\cdot) \arrow[d, "\Phi'_*"] \\
H_q(D''_\cdot) \arrow[r, "\partial_*^D"] & H_{q-1}(D'_\cdot)
\end{tikzcd}$$

b) Und tatsächlich ist die lange Sequenz

$$\begin{tikzcd}
\overset{\partial_*}{\dashrightarrow} H_q(C'_\cdot) \arrow[r, "f_*"] & H_q(C_\cdot) \arrow[r, "g_*"] & H_q(C''_\cdot) \arrow[dll, "\partial_*"'] \\
H_{q-1}(C'_\cdot) \arrow[r, "f_*"] & H_{q-1}(C_\cdot) \arrow[r, "g_*"] & H_{q-1}(C''_\cdot) \overset{\partial_*}{\dashrightarrow}
\end{tikzcd}$$

überall exakt.

Beweis: (a)

Wir wählen eine Homol. klasse $[x''] \in H_q(C''_\cdot)$ und ein $x \in C_q$ mit $g(x) = x''$, sodaß nach Konstruktion von ∂_*^C gerade $\partial_*^C([x'']) = [f^{-1}(\partial^C(x))]$ gilt.

$\Rightarrow \Phi'_* \circ \partial_*^C([x'']) = \Phi'_*([f^{-1}(\partial^C(x))])$

$= [\Phi' \circ f^{-1}(\partial^C(x))] = [F^{-1} \circ \Phi(\partial^C(x))]$

$= [F^{-1}(\partial^D(\Phi(x)))]$

Per Konstruktion des Verbindungshomom. ∂^D_*

gilt nun gerade $\partial^D_*([G(\Phi(x))]) = [F^{-1}(\partial^D(\Phi(x)))]$

und $\overset{\shortparallel}{\partial^D_*}([\Phi'' \circ g(x)]) = \partial^D_* \circ \Phi''_*([x''])$

Also tatsächlich $\Phi'_* \circ \partial^C_* = \partial^D_* \circ \Phi''_*$ ✓

(b) ist Übungsaufgabe 1 $\square$

§ 2 Abelsche Gruppen, der Struktursatz

Sei G im Folgenden eine abelsche Gruppe.

Def. 2.1

a) Sei $E \subset G$ eine Teilmenge. Die Teilmenge $U(E)$ von G aller Linearkombinationen

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + \ldots + n_k x_k, \quad n_j \in \mathbb{Z}, x_j \in E, j = 1, \ldots, k,$$

bildet „die von E erzeugte Untergruppe" von G. Im Fall $U(E) = G$ nennen wir E ein „Erzeugendensystem" von G.

b) Ein Element $x \in E$ hat entweder endliche „Ordnung" $o(x)$, d.h. es existiert eine kleinste natürliche Zahl $o(x) \in \mathbb{N}$ mit $o(x) \cdot x = 0 \in G$, oder es existiert **kein** $m \in \mathbb{N}$ mit $m \cdot x = 0$, also $o(x) = \infty$.

c) Die Menge der Elemente endlicher Ordnung aus G bilden eine Untergruppe, die sogenannte

Torsionsuntergruppe $\mathrm{Tor}\, G \triangleleft G$, und $o(x+y) = \mathrm{kgV}(o(x), o(y))$

Wir haben also im Falle $\#(E) < \infty$ die folgende

<u>Proposition 2.1.</u> Sei G endlich erzeugbar. Es ist genau dann $\mathrm{Tor}\, G = 0$, falls eine der folgenden äquivalenten Bedingungen erfüllt ist:

a) Es gibt ein Erzeugendensystem E von G, sodaß jedes $g \in G$ auf eindeutige Weise als Linearkombination $g = n_1 b_1 + n_2 b_2 + \ldots + n_k b_k$ für eindeutige Erzeugende $b_1, \ldots, b_k \in E$ und Koeffizienten $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$ dargestellt werden kann. In diesem Fall nennen wir E eine „Basis" von G.

b) Es gibt ein Erzeugendensystem E von G, sodaß aus $n_1 b_1 + \ldots + n_k b_k = 0$, für

$b_1, \ldots, b_k \in E$ und $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{Z}$, notwendig $n_1 = 0 = n_2 = \ldots = n_k$ folgt.

c) Es gibt einen Isomorphismus $G \cong \mathbb{Z}^p, p \in \mathbb{N}$. Dieser ist gerade durch die Wahl einer Basis E von G explizit anzugeben, durch

$$\begin{array}{ccc} g = \sum_{j=1}^{p} n_j b_j & \longmapsto & (n_1, n_2, \ldots, n_p) \\ \cap & & \cap \\ G & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}. \end{array}$$

Oder auch $G = \mathbb{Z}[b_1] \oplus \mathbb{Z}[b_2] \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}[b_p]$ und $E = \{b_1, \ldots, b_p\}$. Wir nennen p den „Rang" der „freien abelschen Gruppe" G.

Solche Gruppen sind also bis auf Isomorphie von der Form $\mathbb{Z}^p$, und $\left\{ \begin{pmatrix} x_{11} \\ \vdots \\ x_{1p} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_{21} \\ \vdots \\ x_{2p} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} x_{p1} \\ \vdots \\ x_{pp} \end{pmatrix} \right\}$ bildet genau dann eine Basis von $\mathbb{Z}^p$, falls $\det(\{x_{ij}\}_{i,j=1,\ldots,p}) = \pm 1$ gilt.

Typische Beispiele für Gruppen G mit $\mathrm{Tor}(G) \neq 0$ sind offenbar $\mathbb{Z}/_n$ oder direkte Summen solcher: $\mathbb{Z}/_{n_1} \oplus \mathbb{Z}/_{n_2} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/_{n_r}$. Da jedes Element solch einer Gruppe höchstens die Ordnung $\prod_{j=1}^{r} n_j$ hat, gilt also sogar $\mathrm{Tor}(G) = G$ für $G \cong \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbb{Z}/_{n_j}$.

Dies motiviert für endlich erzeugte abelsche Gruppen den sogenannten

Struktursatz 2.2

Sei G endlich erzeugbar, abelsch. So gilt

$$G \cong G/_{\mathrm{Tor}(G)} \oplus \mathrm{Tor}(G) \cong \mathbb{Z}^p \oplus \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbb{Z}/_{m_j},$$

für eindeutige Zahlen $p, r \in \mathbb{N}_0$ und $m_1, \ldots, m_r \in \mathbb{N}_{>1}$ mit $m_1 | m_2 | \ldots | m_r$

Konkret heißt dies also:

Es gibt ein Erzeugendensystem $z_1, \ldots, z_p, y_1, \ldots, y_r$

minimaler Länge von G, sodaß $z_1, z_2, \ldots, z_p$ unendliche Ordnung und $y_1, \ldots, y_r$ die endlichen Ordnungen $m_1, m_2, \ldots, m_r \geq 2$ besitzen. Offenbar gilt also $Tor(G) \cong \mathbb{Z}[y_1] \oplus \mathbb{Z}[y_2] \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}[y_r]$

sowie $$G/Tor(G) \cong \mathbb{Z}[z_1] \oplus \mathbb{Z}[z_2] \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}[z_p]$$

<u>Beweis-Skizze:</u>

Sei $\{x_1, \ldots, x_n\} = E$ ein Erzeugendensystem von G minimaler Länge n. Falls $n=1$, so wäre $G = \mathbb{Z}[x_1]$ also $G \cong \mathbb{Z}$ oder $G \cong \mathbb{Z}/_{O(x_1)}$ ✓.

<u>Falls $n>1$</u>: a) $x_1, \ldots, x_n$ erfüllen keine <u>nicht-triviale</u> Relation $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$. Dann wäre E eine Basis von G und somit nach Proposit. 2.1 $G = \mathbb{Z}[x_1] \oplus \mathbb{Z}[x_2] \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}[x_n] \cong \mathbb{Z}^n$ ✓

b) Nehmen wir also an, es existierte ein n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$, mit $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 0$.

Bilden wir das Minimum über die Beträge $|a_j| > 0$ solcher Koeffizienten bei Zulassung aller minimaler Erzeugendensysteme $\{x_1, \ldots, x_n\}$ von G, so erhalten wir eine positive natürliche Zahl $m_1 > 0$. Also gibt es ein bestimmtes Erzeugendensystem $\{x_1^*, \ldots, x_n^*\}$ von G, für welches gerade $0 = m_1 x_1^* + \ldots + m_n x_n^*$ mit dem ganz bestimmten, minimalen $m_1 > 0$ gilt.

Teilung von $m_2, \ldots, m_n$ mit Rest ergibt:

$$m_j = k_j m_1 + r_j \,, \quad \text{für } r_j \in \{0, 1, \ldots, m_1 - 1\}, \; k_j \in \mathbb{Z}.$$

Betrachten wir nun das Element

$$y_1 = x_1^* + k_2 x_2^* + k_3 x_3^* + \ldots + k_n x_n^* . \qquad (*)$$

$\Rightarrow$ $\{y_1, x_2^*, \ldots, x_n^*\}$ ist Erz. system von G mit

$$m_1 y_1 + r_2 x_2^* + r_3 x_3^* + \ldots + r_n x_n^*$$

$$= m_1 x_1^* + \underbrace{(m_1 k_2 + r_2)}_{= m_2} x_2^* + \ldots + \underbrace{(m_1 k_n + r_n)}_{m_n} x_n^*$$

$$= 0$$

Da einerseits $0 \leq r_j < m_1$ und andererseits $m_1 \leq |r_j|$ für $r_j > 0$ gelten muß, eben anhand der Defin. von m_1, erhalten wir

$r_2 = 0 = r_3 = \ldots = r_n$. Also $m_1 y_1 = 0$.

$m_1 = 1$ ist unmöglich, da sonst

$0 = y_1 = x_1^* + k_2 x_2^* + \ldots + k_n x_n^*$ gälte

und somit $x_2^*, \ldots, x_n^*$ ein Erzeugendensystem von G der Länge $n-1 < n$ wäre. $\lightning$

$\Rightarrow$ y_1 ist ein Element von G der endlichen Ordnung $m_1 > 1$.

Sei G' die von $\{x_2^*, \ldots, x_n^*\}$ erzeugte U-Gr. von G,

so muß $\mathbb{Z}[y_1] \cap G' = \{0\}$ gelten.

Denn gäbe es Koeffiz. $l_2, \ldots, l_n \in \mathbb{Z}$ und $r \in \{1, \ldots, m_1 - 1\}$ mit

$r y_1 = l_2 x_2^* + \ldots + l_n x_n^*$, so folgte zusammen

mit $(*)$: $0 = r \cdot x_1^* + (r k_2 - l_2) x_2^* + \ldots + (r k_n - l_n) x_n^*$.

Nach Defin. von m_1 gälte aber $m_1 \leq |r| = r \leq m_1 - 1$ ↯

$$\Rightarrow G = \mathbb{Z}[y_1] \oplus G' \cong \mathbb{Z}/_{m_1} \oplus G'$$

Anwendung dieser Argumentationen auf G' liefert somit entweder $G' \cong \mathbb{Z}^{n-1}$, oder wieder die Existenz eines Elementes $y_2 \in G' \subset G$ mit endlicher Ordnung $m_2 > 1$ und $G' = \mathbb{Z}[y_2] \oplus G'' \cong \mathbb{Z}/_{m_2} \oplus G''$, also insgesamt: $G \cong \mathbb{Z}/_{m_1} \oplus \mathbb{Z}/_{m_2} \oplus G''$.

Endliche Iteration liefert die Beh. □

Für den kommenden Paragraphen benötigen wir noch das folgende, abstrakte Konzept des Erzeugens freier abelscher Gruppen aus einer vorgegebenen Basis X:

<u>Definit. 2.2</u> Sei $X \neq \emptyset$ eine beliebige Menge.

Wir definieren die durch die Menge X „frei erzeugte abelsche Gruppe" $\mathcal{F}(X)$ als die Menge aller Abbildungen $f: X \to \mathbb{Z}$, mit $f(x) = 0$ für alle $x \in X$ bis auf endlich viele. Durch die Vorschrift

$$(f + f')(x) := f(x) + f(x') \in \mathbb{Z},$$

ist offenbar $\mathcal{F}(X)$ eine abelsche Gruppe.

Tatsächlich ist $\mathcal{F}(X)$ <u>eine freie, abelsche Gruppe</u> (vgl. Prop. 2.1 (c)), denn sie besitzt offenbar die Basis $\mathcal{B} = \{ \chi_x \mid x \in X \}$, wenn

$$\chi_x(\tilde{x}) := \begin{cases} 1, & \text{für } \tilde{x} = x \\ 0, & \text{"} \ \tilde{x} \neq x \end{cases}$$

die char. Fkt. zu x bezeichnet.

Es gilt also tatsächlich für jedes $f \in \mathcal{F}(X)$ $f = \sum_{x \in X} n_x \chi_x$, mit den durch f eindeutig bestimmten Koeffizienten $n_x := f(x) \in \mathbb{Z}$.

Identifiziert man also die $\underbrace{\text{char. Funktionen}}_{=\text{Punktmassen}}$ χ_x mit den Punkten $x \in X$,
so erhielten wir also eine freie abelsche Gruppe $F(X)$, die von den Basis-Elementen $x \in X$ frei erzeugt wird, also

$$f = \sum_{x\in X} n_x \cdot x\,,\quad \text{mit } n_x = f(x),\ \forall f \in F(X).$$

Ist speziell $\#(X) < \infty$, also $X = \{x_1, \dots, x_n\}$,
so erhalten wir $F(X) \cong \mathbb{Z}[x_1] \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}[x_n]$

$$\cong \mathbb{Z}^n$$

durch die Abb. $f \longmapsto (f(x_1)\cdot x_1, \dots, f(x_n)x_n)$

$$\downarrow$$

$$(f(x_1), \dots, f(x_n))$$