# § 3 Singuläre Homologie-Theorie

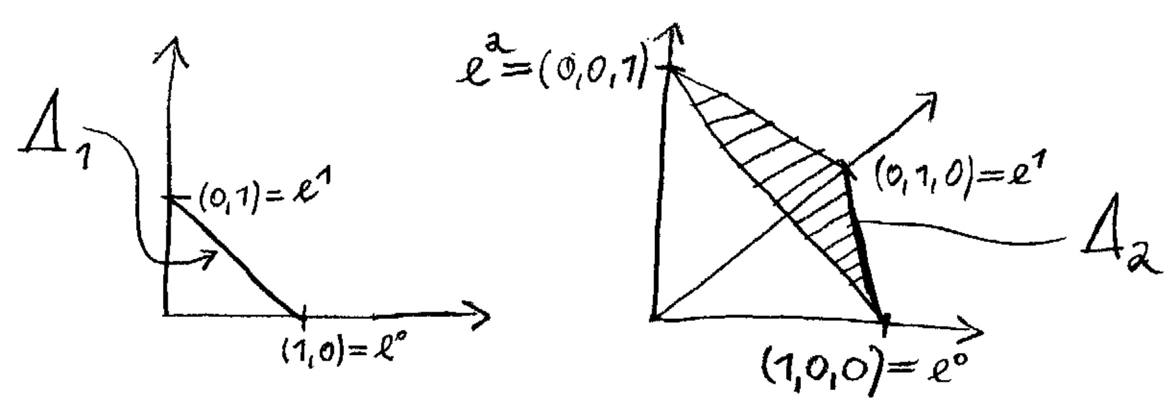
## Definition 3.1

Wir definieren den $q$-dimensionalen „Standard-Simplex" $\Delta_q$ als die Menge aller Punkte $x \in \mathbb{R}^{q+1}$, deren Koordinaten $x_i$ den Bedingungen

$$0 \leq x_i \leq 1, \; i = 0, 1, \ldots, q, \text{ und } \sum_{i=0}^{q} x_i = 1$$

genügen. $\Delta_q$ ist also der Durchschnitt der $q$-dimensionalen Hyperebene $\{x \in \mathbb{R}^{q+1} \mid \sum_{i=0}^{q} x_i = 1\}$ mit dem Quadranten $\{x \in \mathbb{R}^{q+1} \mid x_i \geq 0, i = 0, \ldots, q\}$.

Bsp.:




und $\Delta_3$ ist ein in den $\mathbb{R}^4$ eingebetteter Tetraeder, hat also 4 Ecken, 6 Kanten und 4 Seiten.

$\Delta_q$ hat $q+1$ Ecken, nämlich die Standard-Basisvektoren $e^0 = (1,0,\dots,0)$, $e^1 = (0,1,0,\dots,0)$ bis $e^q = (0,0,\dots,0,1)$ des $\mathbb{R}^{q+1}$ und $q+1$ $(q-1)$-dimensionale „Seiten", also $q+1$ „Randkomponenten"

$\{x \in \Delta_q \mid x_j = 0\} = \mathrm{Bild}(\varepsilon^j_{q-1})$, wobei wir mit $\varepsilon^j_{q-1}: \Delta_{q-1} \hookrightarrow \Delta_q$ die eindeutige lineare, injektive Abbildung mit $\varepsilon^j_{q-1}(e^i) = e^i$, für $i<j$,

$\boxed{j = 0,\dots,q}$ und $\varepsilon^j_{q-1}(e^i) = e^{i+1}$, für $i \geq j$,

bezeichnen. $\varepsilon^j_{q-1}$ bettet also $\Delta_{q-1}$ in die „$j$-te Seite" von $\Delta_q$ ein. Wir nennen $\bigcup_{j=0}^{q} \mathrm{Bild}(\varepsilon^j_{q-1})$ den „Rand" $\partial\Delta_q$ von $\Delta_q$.

<u>Bemerkung</u>:

Zu $q+1$ beliebigen Punkten $P^0, P^1, \dots, P^q \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, gibt es genau eine lineare Abbildung $f: \Delta_q \to \mathbb{R}^n$

mit $f(e^i) = p^i$, nämlich $f(x) := \sum_{i=0}^{q} x_i p^i$.

Zur Konstruktion von $\varepsilon_{q-1}^j$ wählen wir also die $q$ Bildpunkte $e^0, e^1, \dots, \hat{e}^j, \dots, e^q \in \mathbb{R}^{q+1}$ und erhalten die lineare Abb. $\varepsilon_{q-1}^j(x) := x_0 e^0 + x_1 e^1 + \dots + x_{j-1} e^{j-1} +$
$+ 0 \cdot e^j + x_j e^{j+1} + x_{j+1} e^{j+2} + \dots + x_{q-1} e^q$

$\Rightarrow$ $j$-te Seite von $\Delta_q \equiv \text{Bild}(\varepsilon_{q-1}^j) = \{x \in \Delta_q \mid x_j = 0\}$ und liegt gegenüber von $e^j$, für $j = 0, 1, \dots, q$.

## Lemma 3.1:

Es gilt $\varepsilon_q^j \circ \varepsilon_{q-1}^k = \varepsilon_q^k \circ \varepsilon_{q-1}^{j-1}$, für $k < j$.

Beweis: Sei $i < k$, also $i < k < j$, so gilt:

$\varepsilon^j \circ \varepsilon^k : e^i \longmapsto e^i \longmapsto e^i$ und andererseits

$\varepsilon^k \circ \varepsilon^{j-1} : e^i \longmapsto e^i \longmapsto e^i$ ✓ (da $i < j-1$)

Für $k \le i < j-1$:

$\varepsilon^j \circ \varepsilon^k : e^i \longmapsto e^{i+1} \longmapsto e^{i+1}$, da $i+1 < j$, und

$\varepsilon^k \circ \varepsilon^{j-1} : e^i \longmapsto e^i \longmapsto e^{i+1}$ ✓

Für $i \geq j-1$, also $\underline{i \geq j-1 \geq k}$:

$\varepsilon^j \circ \varepsilon^k : e^i \longmapsto e^{i+1} \longmapsto e^{i+2}$, da $i+1 \geq j$, und

$\varepsilon^k \circ \varepsilon^{j-1} : e^i \longmapsto e^{i+1} \longmapsto e^{i+2}$, da $i+1 \geq j > k$ ✓

$\square$

Nun kommen wir zur Definition des für uns zentralen „singulären Kettenkomplexes" zu einem topologischen Raum $X$:

<u>Definition 3.2</u>

Sei $X$ ein fest gewählter, topologischer Raum.

Wir nennen eine stetige Abbildung $\sigma_q : \Delta_q \to X$ einen „singulären $q$-Simplexe", und definieren das $q$-te Glied des „singulären Kettenkomplexes" $S.(X)$ von $X$ als die von allen singulären $q$-Simplizes frei erzeugte abelsche Gruppe, also $S_q(X) := \mathcal{F}\Big(\underbrace{\{\sigma_q : \Delta_q \to X\}}_{=:\Lambda_q}\Big)$

$$\cong \bigoplus_{\sigma_q \in \Lambda_q} \mathbb{Z}[\sigma_q]$$

Es hat also jedes Element $c \in S_q(X)$, jede sogenannte „singuläre $q$-Kette" $c$, eine eindeutige Darstellung $c = \sum_{\sigma \in \Delta_q} n_\sigma \cdot \sigma$, wobei in dieser Summe nur endlich viele $\underset{\mathbb{Z}}{n_\sigma} \neq 0$ sind.

Für $q < 0$ sei $S_q(X) = \{0\}$.

Desweiteren definieren wir den Randoperator

$$\partial_q : S_q(X) \longrightarrow S_{q-1}(X) \text{ durch}$$
$$\sigma_q \longmapsto \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \, \sigma_q \circ \varepsilon^j_{q-1} : \Delta_{q-1} \hookrightarrow \Delta_q \xrightarrow{\sigma_q} X.$$

$\partial_q$ schränkt also $\sigma_q$ auf die $q+1$ Seiten von $\Delta_q$ ein und summiert diese Einschränkungen in $S_{q-1}(X)$ mit alternierendem Vorzeichen!

Proposition 3.2 :

$(S.(X), \{\partial_q\}_{q \in \mathbb{Z}})$ ist in der Tat ein Kettenkomplex, erfüllt also $\partial_q \circ \partial_{q+1} \equiv 0$, $\forall q \in \mathbb{Z}$.

Beweis: Aus Lemma 3.1 erhalten wir:

$$\partial_q \circ \partial_{q+1}(\sigma_{q+1}) = \partial_q\left( \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^j \, \sigma_{q+1} \circ \varepsilon_q^j \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{q} \sum_{j=0}^{q+1} (-1)^{j+k} \left(\sigma_{q+1} \circ \varepsilon_q^j\right) \circ \varepsilon_{q-1}^k$$

$$= \sum_{k \geq j} (-1)^{j+k} \, \sigma_{q+1} \circ \left(\varepsilon_q^j \circ \varepsilon_{q-1}^k\right)$$

$$\underbrace{+ \sum_{k<j} (-1)^{j+k} \, \sigma_{q+1} \circ \Big(\underbrace{\varepsilon_q^j \circ \varepsilon_{q-1}^k}_{= \varepsilon_q^k \circ \varepsilon_{q-1}^{j-1} \text{ nach Lemma 3.1}}\Big)}$$

$$\underset{\substack{k \mapsto j \\ j \mapsto k+1}}{=} \underbrace{\sum_{j<k+1}}_{= \sum_{k \geq j}} (-1)^{(k+1)+j} \, \sigma_{q+1} \circ \left(\varepsilon_q^j \circ \varepsilon_{q-1}^k\right).$$

Also in der Tat: $\partial_q \circ \partial_{q+1} \equiv 0$ auf $\Delta_{q+1}$ und damit auf $S_{q+1}(X)$ $\square$

Ist desweiteren $f: X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen zwei topologischen Räumen und $\sigma_q : \Delta_q \to X$ ein sing. $q$-Simplex in $X$, so ist $f \circ \sigma_q : \Delta_q \longrightarrow Y$ ein singul. $q$-Simplex in $Y$ $\Rightarrow$ $S_q(f) \equiv f_q : S_q(X) \longrightarrow S_q(Y)$

$$\sigma_q \longmapsto f \circ \sigma_q$$

liefert die von $f$ induzierte Kettenabb. $S.(f) : S.(X) \longrightarrow S.(Y)$, denn es gilt in der Tat:

$$\partial_q^Y\big(S_q(f)(\sigma_q)\big) \equiv \sum_{i=0}^{q} (-1)^i (f \circ \sigma_q) \circ \varepsilon_{q-1}^i$$

$$= \sum_{i=0}^{q} (-1)^i f \circ (\sigma_q \circ \varepsilon_{q-1}^i) \equiv S_{q-1}(f)\big(\partial_q^X(\sigma_q)\big) \checkmark$$

Wir erhalten also die folgende, einfache

<u>Proposition 3.3</u>

$$\underset{\text{„Topol. Räume"}}{\underset{\shortparallel}{S : \mathcal{Top}}} \longrightarrow \underset{\text{„Kettenkompl."}}{\underset{\shortparallel}{\partial\mathcal{A}\mathcal{G}}}, \qquad \begin{array}{c} X \\ f\downarrow \\ Y \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} S.(X) \\ \downarrow S.(f) \\ S.(Y) \end{array}$$

ist ein (kovarianter) Funktor, erfüllt also in der Tat $S.(g \circ f) = S.(g) \circ S.(f)$ und $S.(id_X) = id_{S.(X)}$

Sei nun $A \overset{i}{\subseteq} X$ ein „Paar topologischer Räume".
Da $(S.(A), \partial^X|_{S.(A)})$ ein Unterkomplexe von $S.(X)$ ist, erhalten wir zusammen mit dem Quotientenkomplexe $S.(X,A) := S.(X)/S.(A)$ eine kurze exakte Sequenz von Kettenkomplexen:

$$0 \longrightarrow S.(A) \xrightarrow[S.(i)]{} S.(X) \xrightarrow[S.(p)]{} S.(X,A) \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

$S.(i)$ = Inklusion, $S.(p)$ = Projektion.

## Definition 3.3

Wir definieren nun die $q$-te singuläre Homologie-Gruppe $H_q(X)$ von $X$ als $H_q(S.(X))$ bzw. diejenige eines Paares $(X,A)$ als $H_q(X,A) := H_q(S.(X,A))$ und die induzierten Homologie-Morphismen $f_*: H_*(X,A) \to H_*(Y,B)$ als $f_* = H_*(S.(f))$, für jede stetige

Abbildung zwischen Paaren topologischer Räume $f:(X,A)\longrightarrow(Y,B)$, d.h. also

$$f_*([c \pmod A]) := [S.(f)(c)+S.(B)]$$ und speziell

$$f_*([\sigma_q \pmod A]) := [(f\circ\sigma_q)+S.(B)]$$ für

singuläre Simplizes $\sigma_q:(\Delta_q,\partial\Delta_q)\longrightarrow(X,A)$.

Wir erhalten also insgesamt einen Funktor:

Singuläre Homologie $H_*: \mathrm{Top}^{(2)} \xrightarrow{S.} \partial\mathcal{A}\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}\mathcal{A}\mathcal{G}$

Also

$$\begin{array}{ccccccc} (X,A) & & H_0(X,A) & H_1(X,A) & \cdots & H_q(X,A) \\ \downarrow f & \xrightarrow{H_*} & \downarrow f_* & \downarrow f_* & \cdots & \downarrow f_* \\ (Y,B) & & H_0(Y,B) & H_1(Y,B) & \cdots & H_q(Y,B). \end{array}$$

Anwendung von Proposition 1.2 (bzw. Aufgaben 1 und 2) liefert nun in Anwendung auf die kurze exakte Sequenz in (*):

Proposition 3.4

a) Zu jedem Paar von Räumen $(X,A)\in\mathrm{Top}^{(2)}$

erhält man eine <u>lange exakte Homologie-Sequenz</u>:

$$H_{q+1}(X) \xrightarrow{p_*} H_{q+1}(X,A) \xrightarrow{\partial_*^{(X,A)}} H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{p_*} H_q(X,A) \xrightarrow{\partial_*^{(X,A)}}$$

und der Verbindungshomomorphismus $\partial_*^{(X,A)}$ ist einfach durch $\partial_*^{(X,A)}([c \bmod A]) = [\partial_q^{S.(X)}(c)]$ für $q$-Zykli $c \in S_q(X,A)$, also mit $\partial_q(c) \in S_{q-1}(A)$, gegeben, und speziell durch $\partial_*^{(X,A)}([\sigma_q \bmod A])$

$$= \sum_{j=0}^{q} (-1)^j \, [\sigma_q \circ \varepsilon^j_{q-1}] \in H_{q-1}(A)$$

für jeden singulären $q$-Simplex $\sigma_q : (\Delta_q, \partial\Delta_q) \longrightarrow (X,A)$, sodaß also $\partial_q(\sigma_q)$ in $S_{q-1}(A)$ enthalten ist, bzw. $\partial_q(\sigma_q) = 0 \in S_{q-1}(X,A)$.

b) Ist außerdem $f : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ eine stetige Abbildung zwischen Paaren, so erhalten wir die <u>lange exakte Homol.-Leiter</u>

$$
\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "p_*"] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & H_{q+1}(X,A) \arrow[r, "\partial_*^{(X,A)}"] \arrow[d, "f_*"] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & H_q(A) \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "(f|A)_*"] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & H_q(X) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "f_*"] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & H_q(X,A) \arrow[r, "\partial_*^{(X,A)}"] \arrow[d, "f_*"] & {} \\
{} \arrow[r, "p_*"] & H_{q+1}(Y,B) \arrow[r, "\partial_*^{(Y,B)}"] & H_q(B) \arrow[r, "i_*"] & H_q(Y) \arrow[r, "p_*"] & H_q(Y,B) \arrow[r, "\partial_*^{(Y,B)}"] & {}
\end{tikzcd}
$$

also eine lange exakte Sequenz kommutativer Diagramme, anhand der „Natürlichkeit des Verbindungshomomorphismus" $\partial_*$ aus Prop. 1.2, (a)

$\square$

Wie bereits in der Einführung erwähnt wurde, ist die singuläre Homologie $H_*$ ein Homotopie-invarianter Funktor. Das heißt präzise:

## Homotopie – Satz 3.5

Sind zwei Abbildungen zwischen Paaren topologischer Räume $f, g : (X,A) \longrightarrow (Y,B)$ zueinander homotop, also $f \simeq g$, so gilt bereits $f_* = g_* : H_*(X,A) \longrightarrow H_*(Y,B)$.

Hierbei verwandten wir

<u>Definition 3.3 (Homotopie)</u>

Zwei stetige Abbildungen $f, g : (X,A) \to (Y,B)$ nennen wir zueinander homotop, geschrieben $f \simeq g$, falls es eine stetige Abbildung $H : [0,1] \times (X,A) \to (Y,B)$, also mit $H_t(A) \subset B$ $\forall t \in [0,1]$, eine sogenannte Homotopie, gibt, welche $H_0(x) = f(x)$ und $H_1(x) = g(x)$, $\forall x \in X$, erfüllt.

Zum Beweis von Satz 3.5 benötigen wir die

<u>Proposition 3.6</u>

Angenommen, es existieren zu einem beliebigen topol. Raum $X$ Kettenabbildungen $\varphi_X, \psi_X$ von $S.(X)$ nach $S.(X \times [0,1])$ mit der Eigenschaft

$$\varphi_Y \circ f_\cdot = (f \times id_{[0,1]})_\cdot \circ \varphi_X \text{ und } \psi_Y \circ f_\cdot = (f \times id_{[0,1]})_\cdot \circ \psi_X$$

also sodaß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
\sigma \in \arrow[d, mapsto] \arrow[rrr, mapsto, bend left] & S_\bullet(X) \arrow[r, "\varphi_X"] \arrow[d, "f_\bullet"'] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & S_\bullet(X\times[0,1]) \arrow[d, "(f\times id)_\bullet"] & \varphi_X(\sigma) \arrow[dd, mapsto] \\
 & S_\bullet(Y) \arrow[r, "\varphi_Y"] & S_\bullet(Y\times[0,1]) & \\
f\circ\sigma \arrow[rr, mapsto] & & \varphi_Y(f\circ\sigma) = (f\times id_{[0,1]})_\bullet(\varphi_X(\sigma)) &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, und analog für $\psi_X, \psi_Y$, und mit

$H_0(\varphi_P) = H_0(\psi_P) : H_0(P) \longrightarrow H_0(P\times[0,1])$ im Falle

<u>eines einpunktigen Raumes $X = P$</u>, so sind

$\varphi_X$ und $\psi_X$ „kettenhomotop", für jeden Raum $X$,

d.h. es existieren Homomorphismen

$D_q^X : S_q(X) \longrightarrow S_{q+1}(X\times[0,1])$, sodaß

$$\varphi_X - \psi_X = \partial_{q+1}\circ D_q^X + D_{q-1}^X\circ\partial_q \text{ auf } S_q(X) \text{ gilt.} \quad (*)$$

Diese $D_q$ können derart konstruiert werden, daß sie sich im folgenden Sinne „natürlich" verhalten:

$$\begin{array}{ccc} S_q(X) & \xrightarrow{D_q^X} & S_{q+1}(X\times[0,1]) \\ \downarrow f_\bullet & \circleddash & \downarrow (f\times id)_\bullet \\ S_q(Y) & \xrightarrow{D_q^Y} & S_{q+1}(Y\times[0,1]) \end{array} \quad \forall f: X\to Y.$$

$(**)$

<u>Beweis</u>: Für $q<0$ setzen wir $D_q\equiv 0$. ✓

Sei nun ein $q\geq 0$ fest gewählt, und nehmen wir an, $D_n$ für $n\leq q-1$ bereits mit den Eigenschaften $(*)$ und $(**)$ konstruiert zu haben. Wir konzentrieren uns zunächst auf den Spezialfall $X=\Delta_q$ und versuchen, $D_q^{\Delta_q}$ als erstes auf dem speziellen Element $id_{\Delta_q}\in S_q(\Delta_q)$ zu definieren. Wir dürfen nach Induktionsannahme

die $q$-Kette $z_q := \varphi_{\Delta_q}(id_{\Delta_q}) - \psi_{\Delta_q}(id_{\Delta_q}) - D_{q-1}^{\Delta_q}\circ\partial_q(id_{\Delta_q})$ bilden. Aus $(*)$ für $D_{q-1}^{\Delta_q}$ folgt

$$\Rightarrow \partial_q(z_q) = \varphi_{\Delta_q}\circ\partial_q(id_{\Delta_q}) - \psi_{\Delta_q}\circ\partial_q(id_{\Delta_q})$$

$$+ D_{q-2}^{\Delta_q}\partial_{q-1}\circ\partial_q(id_{\Delta_q}) - (\varphi_{\Delta_q}-\psi_{\Delta_q})\circ\partial_q(id_{\Delta_q})$$

$= 0$, eben da $\partial_{q-1} \circ \partial_q = 0$ gilt!

Es ist also $z_q$ ein $q$-Zykel in $S_q(\Delta_q \times [0,1])$.

Da $\Delta_q \times [0,1]$ eine konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^{q+2}$ ist, wissen wir: $H_q(\Delta_q \times [0,1]) = 0$, also daß $z_q$ sogar ein $q$-Rand ist, für $q > 0$!

Im Falle $q = 0$ nutzen wir die Voraussetzung

$H_0(\varphi_{\Delta_q}) = H_0(\psi_{\Delta_q})$ und erhalten

$$[z_0] = \underbrace{(H_0(\varphi_{\Delta_q}) - H_0(\psi_{\Delta_q}))(id_{\Delta_q})}_{=0} - [\underset{\substack{\parallel \\ 0}}{D_{-1}}(\partial_0(id_{\Delta_0}))]$$

also auch daß $z_0$ ein $0$-Rand in $S_0(\Delta_0 \times [0,1])$ ist.

In jedem Fall erhalten wir somit die Existenz einer $(q+1)$-Kette $c_{q+1} \in S_{q+1}(\Delta_q \times [0,1])$ mit $\partial_{q+1}(c_{q+1}) = z_q$ und wir setzen als ersten Meilenstein: $D_q^{\Delta_q}(id_{\Delta_q}) := c_{q+1}$ im Spezialfall $X = \Delta_q$ und $c = id_{\Delta_q} \in S_q(\Delta_q)$.

Erstaunlicherweise erhält man hieraus sofort die Definierbarkeit für $D_q^X$ im allgemeinen Fall, indem man nämlich für ein $\sigma \in S_q(X)$ setzt:

$$\begin{array}{ccc} S_{q+1}(\Delta_q \times [0,1]) & \xrightarrow{(\sigma \times id_{[0,1]})_\bullet} & S_{q+1}(X \times [0,1]) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ c_{q+1} \equiv D_q^{\Delta_q}(id_{\Delta_q}) & \longmapsto & D_q^X(\sigma), \end{array}$$

also $D_q^X(\sigma) := (\sigma \times id_{[0,1]})_\bullet (c_{q+1})$, für einen beliebigen singul. $q$-Simplex $\sigma : \Delta_q \to X$.

Und in der Tat ist diese Definition gerade derart gewählt, daß $D_q^X$ die Eigenschaften (*) und (**) besitzt, denn:

$$\begin{aligned} \partial_{q+1} \circ D_q^X(\sigma) &\equiv \partial_{q+1} (\sigma \times id_{[0,1]})_\bullet (c_{q+1}) \\ &= (\sigma \times id_{[0,1]})_\bullet (\underbrace{\partial_{q+1} c_{q+1}}_{= z_q \text{ nach Wahl von } c_{q+1}}) \\ \text{Def. von } z_q \to &= (\sigma \times id_{[0,1]})_\bullet \varphi_{\Delta_q}(id_{\Delta_q}) \\ &\quad - (\sigma \times id_{[0,1]})_\bullet \psi_{\Delta_q}(id_{\Delta_q}) \\ &\quad - (\text{——}\,''\,\text{——})_\bullet D_{q-1}^{\Delta_q} \circ \partial_q (id_{\Delta_q}) = \longrightarrow \end{aligned}$$

nach Vorauss. an $\varphi_{\Delta_q}$ und $\psi_{\Delta_q}$ bzw. $\varphi_X$ und $\psi_X$

$$= \varphi_X \circ \sigma_\bullet(id_{\Delta_q}) - \psi_X \circ \sigma_\bullet(id_{\Delta_q})$$

$$- \underbrace{(\sigma \times id_{[0,1]})_\bullet \, D_{q-1}^{\Delta_q} \circ \partial_q (id_{\Delta_q})}_{= D_{q-1}^X \circ \sigma_\bullet(\partial_q(id_{\Delta_q})) \equiv D_{q-1}^X \circ \partial_q(\sigma)}$$

nach Eigensch. (**) für $D_{q-1}$

$$= \varphi_X(\sigma) - \psi_X(\sigma) - D_{q-1}^X \circ \partial_q(\sigma), \; \forall \sigma : \Delta_q \to X. \checkmark$$

Und für eine beliebige Abb. $f : X \to Y$ hat

man einerseits $(f \times id_{[0,1]})_\bullet \, D_q^X(\sigma)$

Def. von $D_q \to$ $$\equiv \underbrace{(f \times id_{[0,1]}) \circ (\sigma \times id_{[0,1]})}_{\equiv (f \circ \sigma) \times id_{[0,1]}}{}_\bullet (c_{q+1})$$

und andererseits $D_q^Y \circ f_\bullet(\sigma) = D_q^Y(\underbrace{f \circ \sigma}_{: \Delta_q \to X \to Y})$

Wieder nach Def. von $D_q$ $$\equiv ((f \circ \sigma) \times id_{[0,1]})_\bullet (c_{q+1})$$

$\forall$ sing. $q$-Simplizes $\sigma : \Delta_q \to X$ □

In Anwendung auf die Einbettungen

$i : X \hookrightarrow X \times [0,1]$, $x \mapsto (x, 0)$, $j : X \hookrightarrow X \times [0,1]$, $x \mapsto (x, 1)$ erhalten wir den

Beweis des Homotopiesatzes:

Die soeben angegebenen Einbettungen $i, j$ induzieren Kettenabbildungen $i_., j_. : S_.(X) \longrightarrow S_.(X \times [0,1])$ für einen beliebigen Raum $X$, sodaß für jede stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ gilt:

$i_. f_.(\sigma) = i \circ f \circ \sigma = (f \circ \sigma, 0)$ und ebenso

$(f \times id_{[0,1]})_. \circ i_.(\sigma) = (f \times id)_.(\sigma, 0) = (f \circ \sigma, 0)$, und

analog $j_. f_.(\sigma) = (f \circ \sigma, 1) = (f \times id_{[0,1]})_. \circ j_.(\sigma)$

für einen beliebigen $q$-Simplex $\sigma \in S_q(X)$.

Außerdem gilt $H_0(i) = H_0(j)$ für $X = P$(unkt), denn sei $\sigma : \Delta_0 \longrightarrow P$, so ist $H_0(i)([\sigma]) = [(P, 0)]$ und

$$H_0(j)([\sigma]) = [(P, 1)].$$

Sei nun $\sigma_1 : \Delta_1 \longrightarrow P \times [0,1]$ mit $\sigma_1(e^1) = (P, 0)$ und

$$\sigma_1(e^0) = (P, 1)$$

$$\Rightarrow \partial_1 \sigma_1 \equiv \sigma_1(e^1) - \sigma_1(e^0) = (P, 0) - (P, 1)$$

$$\Rightarrow 0 = H_0(i)([\sigma]) - H_0(j)([\sigma]).$$

$i_\bullet$ und $j_\bullet$ erfüllen somit alle Voraussetzungen der Proposit. 3. 6, sodaß es eine Kettenhomotopie

$D_q^X : S_q(X) \longrightarrow S_{q+1}(X \times [0,1])$ zwischen $i_\bullet$ und $j_\bullet$

gibt, also $\partial_{q+1} \circ D_q^X + D_{q-1}^X \circ \partial_q = i_q - j_q$ mit

$$(**) \qquad D_q^Y \circ f_\bullet = (f \times id_{[0,1]})_\bullet \circ D_q^X \quad \forall f : X \longrightarrow Y.$$

Seien nun $f \simeq g$ fest vorgegeben mit einer Homotopie $H : X \times [0,1] \longrightarrow Y$, also $H_0 = f$, $H_1 = g$.

So sehen wir: $f = H \circ i$ und $g = H \circ j$, also

$$f_\bullet - g_\bullet = H_\bullet \circ (i_\bullet - j_\bullet)$$

Somit erhalten wir für einen beliebigen $q$-Zyklus $c \in S_q(X)$, also mit $\partial_q(c) = 0$:

$$(f_* - g_*)([c]) \equiv [(f_\bullet - g_\bullet)(c)] = [H_\bullet \circ (i_\bullet - j_\bullet)(c)]$$

$$= [H_q \circ (\partial_{q+1} \circ D_q^X + D_{q-1}^X \circ \partial_q)(c)] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{da } \partial_q(c)=0}}{=} [H_q \circ \partial_{q+1}(D_q^X(c))] =$$

$= [\partial_{q+1} \circ H_{q+1}(D_q^X(c))] = 0$

da $H_\bullet$ eine Kettenabb. ist, also

$H_q \circ \partial_{q+1} = \partial_{q+1} \circ H_{q+1}$, $\forall q \in \mathbb{Z}$, erfüllt.

Für $A = \emptyset = B$ $\square$

Nun verwenden wir die Eigenschaft (**) der $D_q$, also deren „Natürlichkeit", in Anwendung auf eine Inklusion $\theta : A \hookrightarrow X$, für einen beliebigen Teilraum $A \subset X$, um den Satz 3.5 in voller Allgemeinheit für $f \simeq g : (X, A) \to (Y, B)$ zu beweisen. Aus der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} S_q(A) \arrow[r, "D_q^A"] \arrow[d, hook, "\theta_\bullet"'] \arrow[dr, phantom, "\circleddash"] & S_{q+1}(A \times [0,1]) \arrow[d, hook, "(\theta \times id)_\bullet"] \\ S_q(X) \arrow[r, "D_q^X"] & S_{q+1}(X \times [0,1]) \end{tikzcd}$$

sehen wir, daß $D_q^X|_{S_q(A)} = D_q^A : S_q(A) \to S_{q+1}(A \times [0,1])$

gilt. Sei nun $H:(X,A)\times[0,1]\longrightarrow(Y,B)$ eine Homotopie zwischen $f$ und $g$, sodaß also wieder $f_\bullet - g_\bullet = H_\bullet \circ (i_\bullet - j_\bullet)$ gilt, nun aber $c\in S_q(X)$ nur noch ein Zykel mod $A$, also ist $\partial_q(c)\in S_{q-1}(A)$. Wegen $D^X_{q-1}(S_{q-1}(A))\subset S_q(A\times[0,1])$ können wir die obige Argumentation erfolgreich übernehmen:

$$(f_* - g_*)([c+S_q(A)]) = [(f_\bullet - g_\bullet)(c+S_q(A))]$$

$$= [H_\bullet \circ (i_\bullet - j_\bullet)(c+S_q(A))]$$

$$= [H_q \circ (\partial_{q+1}\circ D^X_q)(c+S_q(A))]$$

$$+ [\underbrace{H_q(D^X_{q-1}(\partial_q(c)}_{\in S_q(B),\ \text{also} = 0 \text{ in } S_q(Y,B) = S_q(Y)/S_q(B)} + S_{q-1}(A)))]$$

wegen $H: A\times[0,1]\to B$!

$$= [\partial_{q+1}\circ H_{q+1}(D^X_q(c+S_q(A)))] = 0 \qquad \square$$

## Korollar 3.7

Ist $f : X \longrightarrow Y$ eine Homotopie-Äquivalenz, d.h. existiert zu $f$ eine stetige Abb. $g : Y \longrightarrow X$ mit $f \circ g \simeq id_Y$ und $g \circ f \simeq id_X$, so ist $f_* : H_*(X) \xrightarrow{\cong} H_*(Y)$ ein Isomorphismus.

$\square$

## Definition 3.4

Wir nennen einen Teilraum $A \subset X$ einen „Deformationsretrakt" von $X$ mit Retraktion $r : X \longrightarrow A$, falls $r$ stetig ist und $r(a) = a$ $\forall a \in A$ erfüllt und falls es eine Homotopie $H : X \times [0,1] \longrightarrow X$ zwischen $id_X$ und $r$, oder genauer $i_A \circ r : X \xrightarrow{r} A \xrightarrow{i_A} X$ gibt, also mit $H_0(x) = x$, $\forall x \in X$, und $H_1(x) = r(x) \equiv i_A \circ r(x)$.

Wegen der Forderung $r(a) = a$, $\forall a \in A$, ist also $A \subset X$ genau dann ein Deformationsretrakt von $X$, falls $i_A : A \hookrightarrow X$ eine Homotopie-Äquivalenz mit „Homotopie-Inversem" $r : X \to A$ ist, also falls nicht nur die banale Identität $r \circ i_A = id_A$, sondern auch

noch $i_A \circ r \simeq id_X$ erfüllt ist.

$\Rightarrow$ Korollar 3.8

Ist $A \subset X$ ein Deformationsretrakt, so gilt

$(i_A)_* : H_*(A) \underset{r_*}{\overset{\cong}{\rightleftarrows}} H_*(X)$ und außerdem noch

$H_*(X, A) = 0$.

Beweis:

Die erste Aussage folgt sofort aus Kor. 3.7 und die zweite aus der langen Homologie-Sequenz des Paares $(X, A)$:

$$\begin{tikzcd} H_{q+1}(A) \arrow[r, "\cong", "(i_A)_*"'] & H_{q+1}(X) \arrow[r, "p_*"'] & H_{q+1}(X,A) \arrow[dll, "\partial_*"'] \\ H_q(A) \arrow[r, "\cong", "(i_A)_*"'] & H_q(X) \arrow[r, "p_*"'] & {} \end{tikzcd}$$

Aus deren Exaktheit schließen wir:

$\mathrm{Kern}(p_*) = \mathrm{Bild}((i_A)_*) = H_{q+1}(X)$, also maximal

$\Rightarrow \mathrm{Bild}(p_*) = \{0\} = \mathrm{Kern}(\partial_*)$

Und $\mathrm{Bild}(\partial_*) = \mathrm{Kern}((i_A)_*) = \{0\}$

Insgesamt also wegen $H_{q+1}(X,A) / \mathrm{Kern}(\partial_*) \cong \mathrm{Bild}(\partial_*)$

$\Rightarrow H_{q+1}(X,A) = \{0\}, \forall q \in \mathbb{Z}$. $\square$

Als Übungsaufgabe leite man mittels der langen Homologie-Sequenz des Tripels noch das folgende Korollar her:

Korollar 3.9 Sei $B \subset A \underset{i_A}{\subseteq} X$ ein beliebiges Tripel topologischer Räume, sodaß entweder $A$ ein Deformationsretrakt von $X$ oder $B$ solch einer von $A$ sei, so gilt entweder

$$(i_A)_* : H_*(A,B) \xrightarrow{\cong} H_*(X,B) \text{ isomorph, oder}$$

$$p_* : H_*(X,B) \xrightarrow{\cong} H_*(X,A) \text{ isomorph.} \quad \square$$

Wir bereiten uns nun auf den Beweis des zentralen „Ausschneidungssatzes" der singul. Homologie-Theorie vor, indem wir zunächst den „baryzentrischen Unterteilungsoperator"

$B : S_\cdot(X) \longrightarrow S_\cdot(X)$ einführen und dessen Eigenschaften studieren. Wie bei der Konstruktion der Kettenhomotopie $D_q^X : S_q(X) \longrightarrow S_{q+1}(X \times [0,1])$ in Proposition 3.6, definieren wir als ersten Schritt $B_q(id_{\Delta_q})$, und zwar induktiv über $q \in \mathbb{N}_0$:

## Definition 3.5

Für $q=0$ setzen wir $B_0(id_{\Delta_0}) := e^0$.

Für $q \geq 1$ sei dann $B_q(id_{\Delta_q}) := P_q * \left(\sum_{i=0}^{q} (-1)^i (\varepsilon_{q-1}^i)_\cdot u_{q-1}\right)$

wobei $u_{q-1} := B_{q-1}(id_{\Delta_{q-1}})$ die bereits definierte Unterteilung von $\Delta_{q-1}$ als Element in $S_{q-1}(\Delta_{q-1})$, $(\varepsilon_{q-1}^i)_\cdot(u_{q-1})$ deren Einbettung in die $i$-te Seite von $\Delta_q$, aufgefaßt als $(q-1)$-Kette in $\Delta_q$, da $(\varepsilon_{q-1}^i)_\cdot : S_{q-1}(\Delta_{q-1}) \longrightarrow S_{q-1}(\Delta_q)$, und $P_q * : S_{q-1}(\Delta_q) \longrightarrow S_q(\Delta_q)$ die Kegelbildung von $(q-1)$-Ketten innerhalb $\Delta_q$ mit Spitze $= P_q := \frac{1}{q+1}(e^0 + e^1 + \_\_ + e^q)$

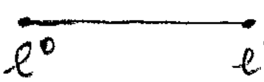
$\equiv$ Baryzenter oder Schwerpunkt von $\Delta_q$

bezeichnet.

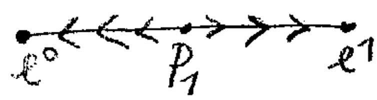
$B_q$ unterteilt also induktiv die 1-dim., 2-dim., 3-dim. bis $(q-1)$-dim. Seiten des Standard-Simplexe

$\Delta_q$ und unterteilt im letzten, $q$-ten Schritt den gesamten Simplex $\Delta_q$, indem es das Unterteilungsmuster auf den $(q-1)$-dim. Seiten von $\Delta_q$ per Kegelbildung mit Spitze = Baryzenter in das Innere von $\Delta_q$ „hineinzieht".

<u>Bsp.:</u> $q=1$: $id_{\Delta_1} =$

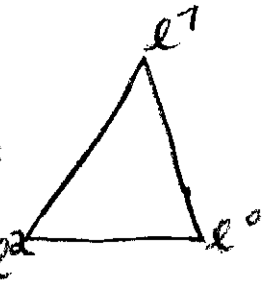



$\overset{B_1}{\longmapsto}$

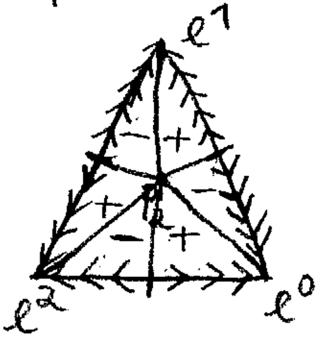



$$= u_1 = P_1 * e^1 - P_1 * e^0$$

$q=2$: $id_{\Delta_2} =$




$\overset{B_2}{\longmapsto}$




$$= P_2 * (\varepsilon^0_{q-1})_. u_1 - P_2 * (\varepsilon^1_{q-1})_. u_1 + P_2 * (\varepsilon^2_{q-1})_. u_1$$

$B_2(id_{\Delta_2})$ besteht also bereits aus $3 \cdot 2 = 6$ kleinen 2-Simplizes in $\Delta_2$, die mit alternierenden Vorzeichen $+1$ oder $-1$ in $S_2(\Delta_2)$ summiert werden.

## Definition 3.6 (des Unterteilungsoperators)

Wir definieren die Wirkung des baryzentr. Unterteilungsoperators $B_q^X$ auf einen singul. $q$-Simplex $\sigma_q : \Delta_q \to X$, in einen beliebigen topol. Raum $X$, als

$$B_q^X(\sigma_q) := (\sigma_q)_\bullet(u_q) \equiv (\sigma_q)_\bullet(\underbrace{B_q(id_{\Delta_q})}_{\in S_q(\Delta_q)}) \in S_q(X).$$

Mittels linearer Fortsetzung auf ganz $S_q(X)$ erhalten wir somit den Unterteil.-Operator

$$B_q^X : S_q(X) \longrightarrow S_q(X).$$

## Proposition 3.10

a) $B_\bullet^X : S_\bullet(X) \longrightarrow S_\bullet(X)$ ist in der Tat eine Ketten-Abbildung, erfüllt also $B_{q-1}^X \circ \partial_q = \partial_q \circ B_q^X$.

b) $B_\bullet$ verhält sich natürlich gegenüber beliebigen stetigen Abbildungen $f : X \to Y$, d. h.

$$\begin{tikzcd} S_\bullet(X) \arrow[r, "B_\bullet^X"] \arrow[d, "S_\bullet(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & S_\bullet(X) \arrow[d, "S_\bullet(f)"] \\ S_\bullet(Y) \arrow[r, "B_\bullet^Y"] & S_\bullet(Y) \end{tikzcd}$$

kommutiert $\forall f : X \to Y$.

c) $B_\cdot^X$ ist kettenhomotop zur Identität $id_{S_\cdot(X)}$.

<u>Beweis</u>

b) Sei $f: X \to Y$ beliebig und $\sigma_q: \Delta_q \to X$, so gilt

$$f_\cdot \circ B_q^X(\sigma_q) \equiv f_\cdot \circ (\sigma_q)_\cdot(u_q) = (f \circ \sigma_q)_\cdot(u_q)$$

Und da $f \circ \sigma_q : \Delta_q \to Y$ ein singul. Simplex in $Y$ ist

$$\underset{\text{Def. von } B^Y}{=} B_q^Y(f \circ \sigma_q) = B_q^Y \circ f_\cdot(\sigma_q). \quad \checkmark$$

a) Wir beweisen per Induktion und starten bei $q=1$:

Sei hierfür $\sigma_1 : \Delta_1 \to X$ beliebig gew., so gilt:

$$\partial_1 \cdot B_1^X(\sigma_1) \equiv \partial_1 \circ (\sigma_1)_\cdot(u_1) = (\sigma_1)_\cdot(\partial_1 u_1) \underset{\uparrow}{=} (\sigma_1)_\cdot(e^1 - e^0)$$

$$= \sigma_1(e^1) - \sigma_1(e^0) = \partial_1(\sigma_1) \quad \text{Def. von } u_1 \text{ und } \partial_1$$

$$= B_0^X(\partial_1(\sigma_1)), \text{ da } B_0^X = id_{S_0(X)} \text{ ist.} \checkmark$$

Sei nun $q \geq 2$ beliebig fixiert, und nehmen wir an, daß die zu beweisende Aussage auf $S_{q-1}(X)$ bereits gilt. Wegen $\partial_q(id_{\Delta_q}) = \sum_{i=0}^{q} (-1)^i \varepsilon_{q-1}^i$ gilt per

Def. von $B_{q-1}^{\Delta_q}$: $\quad u_q = P_q * ((\partial_q(id_{\Delta_q}))_\cdot(u_{q-1}) =$

$= P_q * \left(B_{q-1}^{\Delta_q}(\partial_q(id_{\Delta_q}))\right)$. Wenden wir nun die

Formel $\partial_q(P_q * c) = c - P_q * \partial_{q-1} c$, $\forall c \in S_{q-1}(X)$, an

$$\Rightarrow \partial_q \circ B_q^X(\sigma) \equiv \partial_q \circ \sigma_\cdot(u_q) = \sigma_\cdot(\partial_q(u_q))$$

$$= \sigma_\cdot\left(B_{q-1}^{\Delta_q} \circ \partial_q(id_{\Delta_q})\right)$$

$$- \sigma_\cdot\Big(P_q * \big(\underbrace{\partial_{q-1} \circ B_{q-1}^{\Delta_q} \circ \partial_q}(id_{\Delta_q})\big)\Big)$$

nach Indukt. annahme $= B_{q-2}^{\Delta_q} \circ \partial_{q-1} \circ \partial_q \equiv 0$

somit $= \left(\sigma_\cdot \circ B_{q-1}^{\Delta_q}\right)\left(\partial_q(id_{\Delta_q})\right)$

mit (b) für $f := \sigma : \Delta_q \to X$

$$= \left(B_{q-1}^X \circ \sigma_\cdot\right)\left(\partial_q(id_{\Delta_q})\right)$$

$$= B_{q-1}^X \circ \partial_q\left(\sigma_\cdot(id_{\Delta_q})\right) \equiv B_{q-1}^X \circ \partial_q(\sigma)$$

$\forall$ singul. Simplizes $\sigma : \Delta_q \to X$. ✓

c) Wir betrachten die Einbettung $i : X \hookrightarrow X \times [0,1]$
$x \longmapsto (x,0)$

Die beiden Kettenabbildungen $i_\cdot$ und $i_\cdot \circ B_\cdot^X$

von $S_\cdot(X)$ nach $S_\cdot(X\times[0,1])$ sind „natürlich",

d.h. es kommut. anhand der Natürlichkeit von

$B_\cdot^X$ nach Teil (b) das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
S_q(X) \arrow[r, "B_q^X"] \arrow[d, "f_\cdot"] \arrow[dr, phantom, "\circleddash"] & S_q(X) \arrow[r, "i_\cdot"] \arrow[d, "f_\cdot"] \arrow[dr, phantom, "\circleddash"] & S_q(X\times[0,1]) \arrow[d, "(f\times id_{[0,1]})_\cdot"] \\
S_q(Y) \arrow[r, "B_q^Y"] & S_q(Y) \arrow[r, "i_\cdot"] & S_q(Y\times[0,1])
\end{tikzcd}$$

Und außerdem gilt wegen $B_0^X = id_{S_0(X)}$:

$H_0(i_\cdot \circ B_\cdot^X) = H_0(i_\cdot)$ trivialerweise, sodaß

uns Proposition 3.6 eine Kettenhomotopie

$D_q^X : S_q(X) \longrightarrow S_{q+1}(X\times[0,1])$ zwischen

$i_\cdot \circ B_\cdot^X$ und $i_\cdot$ liefert, d.h. es gilt

$$i_q \circ B_q^X - i_q = \partial_{q+1}\circ D_q^X + D_{q-1}^X \circ \partial_q \quad \text{auf } S_q(X)$$

Ist nun $pr: X\times[0,1] \longrightarrow X$ die Projektion und
$(x,t) \longmapsto x$

wenden wir $pr_q$ auf die obige Gleichung an, so erhalten wir wegen $pr \circ i = id_X$:

$$B_q^X - id_{S_q(X)} = pr_q \circ i_q \circ B_q^X - pr_q \circ i_q$$
$$= \partial_{q+1} \circ (pr_{q+1} \circ D_q^X) + (pr_q \circ D_{q-1}^X) \circ \partial_q \quad \text{auf } S_q(X)$$

$\Longrightarrow$ $pr_{q+1} \circ D_q^X : S_q(X) \longrightarrow S_{q+1}(X)$ ist in der Tat eine Kettenhomotopie: $B_\cdot^X \simeq id_{S_\cdot(X)}$ $\square$

Nun werden wir die entscheidenden Eigenschaften der Iterationen $(B_\cdot^X)^r := B_\cdot^X \circ \_\_ \circ B_\cdot^X$ herleiten:

<u>Proposition 3.11</u>

Sei $A \subset X$ ein beliebiges Paar von Räumen, so gelten:

a) Für $c \in S_q(A)$ ist auch jede iterierte Unterteilung $(B_\cdot^X)^r(c) \in S_q(A)$, $\forall r \in \mathbb{N}$.

(b) Ist $z \in S_q(X,A)$ ein $q$-Zyklus mod $A$, so auch $(B_\cdot^X)^r(z)$ und mit $[z] = [(B_\cdot^X)^r(z)] \in H_q(X,A)$.

Beweis

(a) folgt sofort aus der Defin. von $B^X_\cdot$, denn für jeden singul. Simplexe $\sigma : \Delta_q \to A$ ist $B^X_\cdot(\sigma) := \sigma_\cdot(u_q) \in S_q(A)$ und somit auch $(B^X_\cdot)^r(\sigma) \in S_q(A)$.

(b) Anhand der Natürlichkeit der Kettenhomotopie $D^X_q : S_q(X) \to S_{q+1}(X \times [0,1])$ zwischen $i_\cdot \circ B^X_\cdot$ und $i_\cdot$ aus dem Beweis von Propos. 3.10 folgt die Natürlichkeit der aus dieser gewonnenen Kettenhomotopie $pr_\cdot \circ D^X_q$ zwischen $B^X_\cdot$ und $id_{S_\cdot(X)}$, d. h. für jede stetige Abbild. $f : X \to Y$ kommutiert das Diagr.:

$$\begin{tikzcd}
S_q(X) \arrow[r, "pr_\cdot \circ D^X_q"] \arrow[d, "S_q(f)"'] \arrow[dr, phantom, "\ominus"] & S_{q+1}(X) \arrow[d, "S_{q+1}(f)"] \\
S_q(Y) \arrow[r, "pr_\cdot \circ D^Y_q"] & S_{q+1}(Y)
\end{tikzcd}$$

Wenden wir dies auf die Inklusion $f := i_A : A \hookrightarrow X$ an, so sehen wir, daß $pr. \circ D_q^X|_{S_q(A)} = pr. \circ D_q^A$, sodaß insbesondere $pr. \circ D_q^X : S_q(A) \to S_{q+1}(A)$ gilt.

Ist nun $z \in S_q(X)$ mit $\partial_q(z) \in S_{q-1}(A)$ beliebig gegeben, so sehen wir mittels der „Homotopie-Gleichung":

$$B_q^X(z) - z = \partial_{q+1} \circ (pr. \circ D_q^X)(z) + \underbrace{(pr. \circ D_{q-1}^X) \circ \partial_q(z)}_{\in S_q(A)}$$

(zwischen $B_\cdot^X$ und $Id_{S_\cdot(X)}$)

daß in der Tat auch $\partial_q B_q^X(z) \in S_{q-1}(A)$ und

$$[B_q^X(z) + S_q(A)] = [z + S_q(A)] \in H_q(X,A) \text{ gilt.}$$

Per Induktion über $r \in \mathbb{N}$ folgt dann die Beh. $\square$

<u>Proposition 3.12</u>

Seien $U$ und $V$ zwei offene Teilmengen eines topologischen Raumes $X$, sodaß $X = U \cup V$ ist, so kann jede $q$-Kette $c \in S_q(X)$ derart häufig mittels $B^{\cdot}$ unterteilt werden, daß sich $(B^X_\cdot)^r(c)$ als Summe einer Kette $x \in S_q(U)$ und einer Kette $y \in S_q(V)$ schreiben läßt.

<u>Beweis</u>: Sei OBDA $c$ ein einziger singulärer $q$-Simplex $\sigma : \Delta_q \to U \cup V$. So bilden die Mengen $\sigma^{-1}(U)$, $\sigma^{-1}(V)$ eine offene Überdeckung des kompakten $q$-Simplex $\Delta_q$, sodaß sich eine („Lebesgue"-) Zahl $\lambda > 0$ derart klein wählen läßt, mit der Eigenschaft:
Jede Teilmenge von $\Delta_q$ mit kleinerem Durchmesser als $\lambda$ liegt entweder vollständig in $\sigma^{-1}(U)$ oder in $\sigma^{-1}(V)$.
$\Delta_q$ kann nun so häufig baryzentrisch unterteilt werden, daß jeder kleine $q$-Simplex dieser Unterteilung einen kleineren Durchmesser als $\lambda$ haben und somit entweder in $\sigma^{-1}(U)$

oder in $\sigma^{-1}(V)$ vollständig enthalten sein muß.
Anders ausgedrückt, es gibt zu $\lambda$, also zu $U$ und $V$, eine nat. Zahl $r \geq 1$ derart groß, daß die $r$-fache Unterteilung von $id_{\Delta_q}$

$$\left(B_q^{\Delta_q}\right)^r(id_{\Delta_q}) = n_1 \tau_1 + n_2 \tau_2 + \dots + n_k \tau_k$$

eine Linearkombinat. aus singulären $q$-Simplizes $\tau_1, \dots, \tau_k \in \Delta_q(\Delta_q)$ mit $\tau_i(\Delta_q) \subset \sigma^{-1}(U)$ oder $\subset \sigma^{-1}(V)$ ist. Somit ist also in der Tat

$$(B_q^X)^r(\sigma) \equiv (B_q^X)^r \circ \sigma_\cdot(id_{\Delta_q}) = \sigma_\cdot\left(\left(B_q^{\Delta_q}\right)^r(id_{\Delta_q})\right)$$

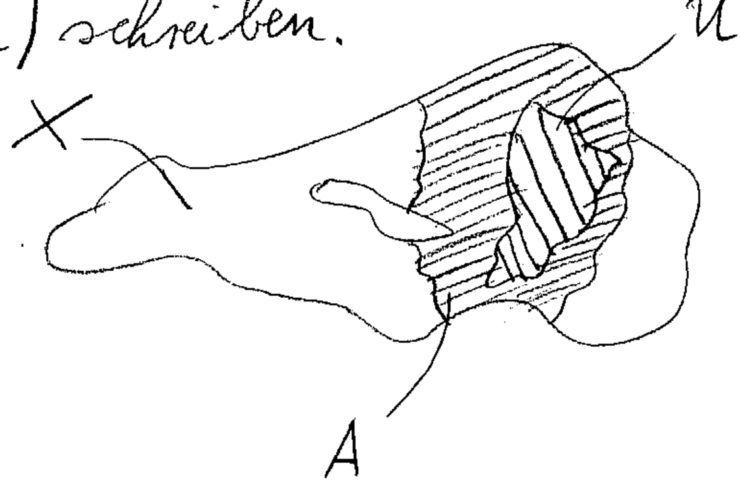
$$= n_1\, \sigma \circ \tau_1 + n_2\, \sigma \circ \tau_2 + \dots + n_k\, \sigma \circ \tau_k$$

eine Linearkombin. aus singulären $q$-Simplizes $\sigma \circ \tau_i : \Delta_q \longrightarrow U \cup V$ mit $\sigma \circ \tau_i(\Delta_q) \subset U$ oder $\subset V$, also $(B_q^X)^r(\sigma) = x + y$, $x \in S_q(U)$ und $y \in S_q(V)$. $\square$

Satz 3.13 (Ausschneidungssatz)

Sei $A \subset X$ ein beliebiges Paar topologischer Räume, so gilt für jede Teilmenge $\mathcal{U} \subset A$ mit $\overline{\mathcal{U}} \subset \mathring{A}$, also deren Abschluß noch im offenen Kern von $A$ enthalten ist, daß die Inklusion $(X \setminus \mathcal{U}, A \setminus \mathcal{U}) \overset{i}{\hookrightarrow} (X, A)$ einen (Ausschneidungs-) Isomorphismus $i_*: H_*(X \setminus \mathcal{U}, A \setminus \mathcal{U}) \xrightarrow{\cong} H_*(X, A)$ induziert.

Beweis: Anhand der Voraussetzung $\overline{\mathcal{U}} \subset \mathring{A}$, können wir $X$ als Vereinigung der offenen Mengen $\mathring{A}$ und $(X \setminus \mathcal{U})^\circ$ schreiben.




1. Surjektivität von $i_*$

Wählen wir hierzu ein $\alpha \in H_q(X, A)$ und einen

Repräsentanten $z \in S_q(X, A)$ von $\alpha$, also insbes. mit $\partial_q(z) \in S_{q-1}(A)$. Nach Propos. 3.12 können wir ein $r \in \mathbb{N}$ derart groß wählen, daß

$$(B_q^X)^r(z) = a + x\,,\quad \text{für } a \in S_q(\mathring{A}) \text{ und } x \in S_q((X \setminus \mathcal{U})^\circ)$$

gilt. Zusammen mit Propos. 3.11, (b) folgt:

$$\alpha = [z] = [a+x] = [x] \text{ in } H_q(X, A).$$

Einerseits gilt nun $\partial_q(x) \in S_{q-1}(X \setminus \mathcal{U})$, aber andererseits ist

$$\begin{aligned} \partial_q(x) &= \partial_q \circ (B_q^X)^r(z) - \partial_q(a) \\ &= (B_{q-1}^X)^r(\partial_q(z)) - \partial_q(a) \in S_{q-1}(A), \end{aligned}$$

denn $\partial_q(z) \in S_{q-1}(A)$ und $B_\bullet^X|_{S_\bullet(A)} = B_\bullet^A$ anhand der Natürlichkeit von $B_\bullet^X$ in Anwendung auf die Inklusion $A \hookrightarrow X$. Insgesamt ist somit $\partial_q(x) \in S_{q-1}(A \setminus \mathcal{U})$, sodaß $x$ bereits eine Homologie-Klasse $\beta \in H_q(X \setminus \mathcal{U}, A \setminus \mathcal{U})$ repräsentiert, für die gerade $i_*(\beta) = [x] = \alpha$ gilt.

2. Injektivität von $i_*$

Sei hierzu ein $\alpha \in H_q(X\setminus\mathcal{U}, A\setminus\mathcal{U})$ mit $i_*(\alpha)=0$ und $z \in S_q(X\setminus\mathcal{U})$, mit $\partial_q(z) \in S_{q-1}(A\setminus\mathcal{U})$, ein Repräsentant von $\alpha$ in $S_q(X\setminus\mathcal{U}, A\setminus\mathcal{U})$.

$i_*([z])=0$ bedeutet, daß es eine $(q+1)$-Kette $c \in S_{q+1}(X)$ und ein $a \in S_q(A)$ mit $\partial_{q+1}(c) = z + a$ gibt.

Wieder können wir nach Propos. 3.12 ein $r \in \mathbb{N}$ so groß wählen, daß $(B^X_{q+1})^r(c) = \tilde{a} + x$, für ein $\tilde{a} \in S_{q+1}(\mathring{A})$ und $x \in S_{q+1}((X\setminus\mathcal{U})^\circ)$.

$$\Rightarrow \partial_{q+1}(\tilde{a}) + \partial_{q+1}(x) = (B^X_q)^r \circ \partial_{q+1}(c)$$
$$= (B^X_q)^r(z) + (B^X_q)^r(a)$$

$$\Rightarrow y := \underbrace{(B^X_q)^r(z)}_{\in S_q(X\setminus\mathcal{U})} - \underbrace{\partial_{q+1}(x)}_{\in S_q(X\setminus\mathcal{U})} = \underbrace{\partial_{q+1}(\tilde{a})}_{\in S_q(A)} - \underbrace{(B^X_q)^r(a)}_{\in S_q(A)}$$

$$\Rightarrow [(B_q^{\times})^{\prime}(z) + S_q(A)] = [\partial_{q+1}(x) + \underset{\in S_q(A)}{y} + S_q(A)]$$

$$\text{Propos. 3.11, (b):}\quad \underset{[z + S_q(A)]}{\|} = 0 \in H_q(X, A)$$

Somit erhalten wir $\alpha = [z + S_q(A)] = 0$ ✓ □

Kombinieren wir diesen Satz mit Korollar 3.9, so erhalten wir den folgenden wichtigen Satz zur Homologie einer großen Klasse von Quotientenräumen $X/A$, in denen also eine abgeschlossene Teilmenge $A \subset X$ zu einem einzigen Punkt $\langle A \rangle$ in $X/A$ identifiziert wird:

## Satz 3.14

Sei $X$ ein beliebiger Hausdorff-Raum und $A \subset X$ ein abgeschlossener Teilraum mit der Eigenschaft, daß $A$ ein strenger Deformationsretrakt einer offenen Umgebung $U$ von $A$ in $X$ sei, also daß

$A$ eine offene Umgebung $U$ mit Retraktion $r : U \to A$ besitzt, sodaß $i_A \circ r \underset{H}{\simeq} id_U$ und $r \circ i_A = id_A$ und sodaß die Homotopie $H : U \times [0,1] \to U$ $H_t(a) \equiv a$, $\forall a \in A$ und $\forall t \in [0,1]$, erfüllt.

Dann induziert die Projektion $P : (X, A) \to \left(X/A, \langle A \rangle\right)$ einen Isomorphismus $P_* : H_*(X, A) \xrightarrow{\cong} H_*\left(X/A, \langle A \rangle\right)$

<u>Beweis:</u>

Nach Voraussetzung existieren also eine offene Umgeb. $U$ von $A$ in $X$ und eine Homotopie $H : U \times [0,1] \to U$ mit $H_0 = id_U$, $H_1 = i_A \circ r$ und $H_t|_A = id_A$ $\forall t \in [0,1]$.

Anhand der Quotienten-Topologie von $X/A$ ist $P(U) =: V$ eine offene Umgebung des Punktes $x_0 := \langle A \rangle$ in $X/A$, und wieder ist $x_0$

ein strenger Deformationsretrakt von $V$, denn bezeichnet $\tilde{r}: V \to x_0$ die Retraktion und $i_{x_0}: x_0 \hookrightarrow V$ die Inklusion, so liefert

$$k_t(x) := \begin{cases} x_0, & \text{für } x = x_0 \text{ und } \forall t \in [0,1] \\ P \circ H_t \circ P^{-1}, & \forall x \in V \setminus \{x_0\}, \forall t \in [0,1] \end{cases}$$

eine Homotopie $k: V \times [0,1] \to V$ von $k_0 = id_V$ nach $k_1(x) = \begin{Bmatrix} x_0, & x = x_0 \\ P \circ i_A \circ r \circ P^{-1}, & x \in V \setminus \{x_0\} \end{Bmatrix} = i_{x_0} \circ \tilde{r}(x)$ ist.

$$\begin{tikzcd} k_1: V \arrow[r, two heads, "\tilde{r}"] & x_0 \arrow[r, hook, "i_{x_0}"] & V \\ H_1: U \arrow[u, "P"] \arrow[r, two heads, "r"] \arrow[ur, phantom, "\ominus"] & A \arrow[u, "P"] \arrow[r, hook, "i_A"] \arrow[ur, phantom, "\ominus"] & U \arrow[u, "P"] \end{tikzcd}$$

Die Einschränkung von $P: (X, U) \to (X/A, V)$ auf $X \setminus A$ ist trivialerweise ein Homöom. auf $(X/A \setminus \{x_0\}, V \setminus \{x_0\})$. Insgesamt haben wir das kommutat. Diagramm

$$
\begin{tikzcd}
(X,A) \arrow[r, hook] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (X,U) \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & (X\setminus A, U\setminus A) \arrow[l, hook'] \arrow[d, "p"', "\cong"] \\
(X/A, x_0) \arrow[r, hook] & (X/A, V) & (X/A \setminus \{x_0\}, V\setminus\{x_0\}) \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}
$$

Da $A$ strenger Deformat. retrakt von $U$ und $x_0$ solch einer von $V$ ist, liefert Korollar 3.9, daß die beiden Inklusionen im linken Quadrat Isomorphismen induzieren. Und da $\bar{A} \subset U = \mathring{U}$ und $x_0 \in V = \mathring{V}$ induzieren ebenfalls die beiden Inklusionen im rechten Quadrat Isomorphismen anhand des obigen Ausschneidungssatzes!

Anhand der Kommutativität des gesamten Diagramms folgt somit nach Anwendung von $H_*$, daß $p_* : H_*(X,A) \xrightarrow{\cong} H_*(X/A, \langle A \rangle)$ ein Isom. ist. $\square$