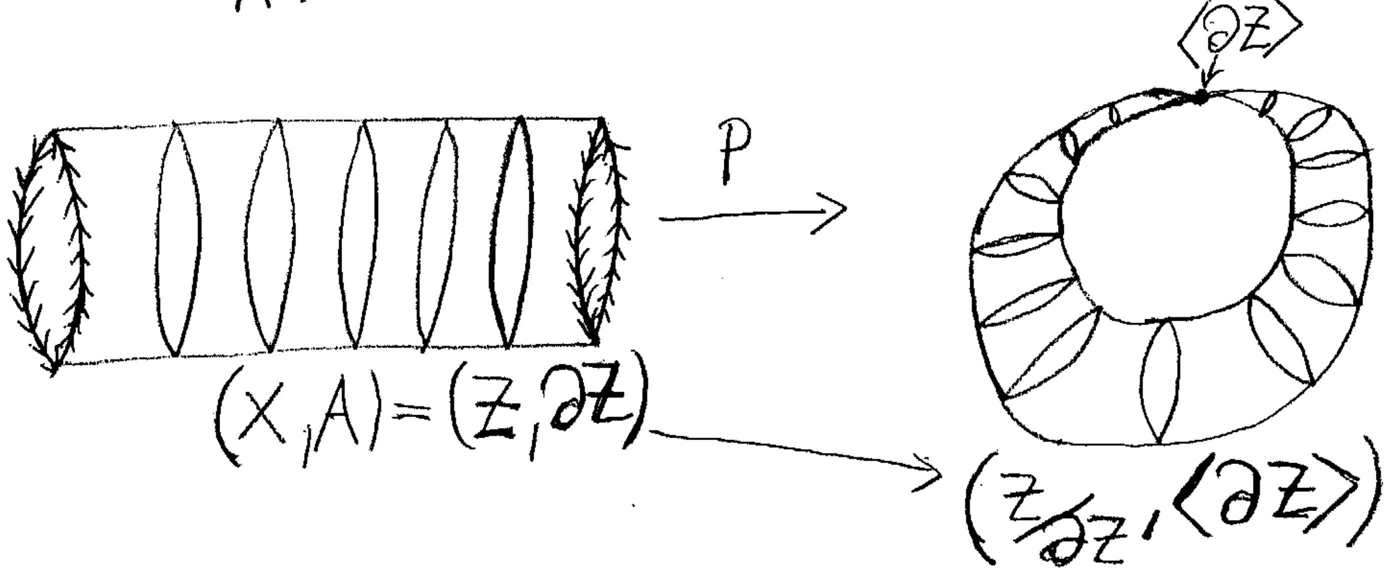
§4) Einige Beispiele und Anwendungen des §3

Zunächst veranschauliche man sich die Aussage des Satzes 3.14 an den beiden Beispielen:

a) Sei $X := \text{Zylinder} \equiv S^1 \times [0,1]$ und

$$A := \partial Z \equiv S^1 \sqcup S^1 := S^1 \times \{0\} \cup S^1 \times \{1\}$$



Aus der l. e. Seq. von $(Z, \partial Z)$ erhält man

$$0 \longrightarrow H_2(Z) \xrightarrow{p_*} H_2(Z,\partial Z)$$

$$\xrightarrow{\partial_*} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cong H_1(\partial Z) \xrightarrow{i_*} H_1(Z) \xrightarrow{p_*} H_1(Z,\partial Z)$$

$$\xrightarrow{\partial_*} \underset{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\overset{\cong}{H_0(\partial Z)}} \xrightarrow{i_*} H_0(Z) \cong \mathbb{Z}$$

Seien $\sigma_1^j : \Delta_1 \to \partial Z = S_1^1 \sqcup S_2^1$ die beiden Repräsentanten der kanon. Erzeuger von $H_1(\partial Z)$, also $\sigma_1^1((1-t)e^0 + te^1) := (e^{2\pi i t}, 0)$

und $\sigma_1^2((1-t)e^0 + te^1) := (e^{2\pi i t}, 1)$.

$\Rightarrow i \circ \sigma_1^j : \Delta_1 \to Z$ sind beide Repräsentanten dergleichen Homologie-Klasse, da man leicht eine 2-Kette $c \in S_2(Z)$ mit $\partial c = i \circ \sigma_1^1 - i \circ \sigma_1^2$ konstruiert.

Es ist also $i_*([\sigma_1^1]) = i_*([\sigma_1^2])$ ein Erzeuger von $H_1(Z) \cong \mathbb{Z}$ und somit

$\operatorname{Kern}(i_*) = \{ n \cdot ([\sigma_1^1] - [\sigma_1^2]) \mid n \in \mathbb{Z} \} \cong \mathbb{Z}$,

$\operatorname{Bild}(i_*) = H_1(Z)$

Somit hat $\partial_* : H_2(Z, \partial Z) \to H_1(\partial Z)$

$\operatorname{Bild}(\partial_*) \cong \mathbb{Z}$ und ist injektiv, da

$H_2(Z) \cong H_2(S^1) = 0$ ist. $\Rightarrow H_2(Z, \partial Z) \cong \mathbb{Z}$

Desweiteren gilt für $p_*: H_1(Z) \longrightarrow H_1(Z, \partial Z)$
$\text{Kern}(p_*) = \text{Bild}(i_*) = H_1(Z)$, d.h. p_* ist die triviale Abbildung mit $\text{Bild}(p_*) = 0$.

$\Rightarrow \text{Kern}(\partial_*) = \text{Bild}(p_*) = 0$, d.h.
$\partial_*: H_1(Z, \partial Z) \rightarrowtail H_0(\partial Z) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ ist <u>injektiv</u>.

Und wieder bildet i_* beide Erzeuger von $H_0(\partial Z) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ auf denselben von $H_0(Z)$ ab, sodaß wir wieder $\text{Kern}(i_*) \cong \mathbb{Z}$ für $i_*: H_0(\partial Z) \longrightarrow H_0(Z)$ und somit

$H_1(Z, \partial Z) \cong \text{Bild}(\partial_*) = \text{Kern}(i_*) \cong \mathbb{Z}$ erhalten.

Satz 3.14 liefert uns somit für den Quotientenraum $Z/\partial Z$:

$$H_j(Z/\partial Z) \underset{p_*^{-1}}{\cong} H_j(Z, \partial Z) \cong \mathbb{Z}, \text{ für } j = 1, 2.$$

b) Sei $X :=$ Torus mit einem kleinen Loch
$= S^1 \times S^1 \setminus \mathring{B}_\varepsilon(x)$, $A := \partial X = \partial B_\varepsilon(x) \cap (S^1 \times S^1)$
$\cong S^1$

Für (X,A) haben wir die folgende l. e. Sequenz:

$$\begin{tikzcd}
0 = H_2(\partial X) \arrow[r] & 0 = H_2(X) \arrow[r] & H_2(X,A) \arrow[dll, bend left] \\
\underset{\mathbb{Z}}{\underset{\|\wr}{H_1(\partial X)}} \arrow[r] & \underset{\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}}{\underset{\|\wr}{H_1(X)}} \arrow[r, "p_*"] & H_1(X,A) \arrow[dll, bend left, "\partial_*"'] \\
\underset{\mathbb{Z}}{\underset{\|\wr}{H_0(\partial X)}} \arrow[r] & \underset{\mathbb{Z}}{\underset{\|\wr}{H_0(X)}} &
\end{tikzcd}$$

wofür wir benutzten, daß X zu $S^1 \vee S^1$ homotopie-äquivalent ist. Hieraus kann man zunächst nur erkennen, daß $H_2(X,A)$ zu einer Untergruppe von $\mathbb{Z}$ isomorph sein muß und wegen

$$\underset{\mathrm{Image}(\partial_*) \,\triangleleft\, \mathbb{Z}}{\underset{\|\wr}{H_1(X,A)/_{\mathrm{Kern}(\partial_*)}}} = H_1(X,A)/_{\mathrm{Im}(p_*)}$$

$H_1(X,A)$ höchstens drei Erzeuger haben kann.

Satz 3.14 besagt nun wegen $X/_{\partial X} \cong S^1 \times S^1$:

$H_2(X,A) \cong H_2(S^1 \times S^1, \langle A \rangle)$ also $\cong \mathbb{Z}$ und

$H_1(X,A) \cong H_1(S^1 \times S^1, \langle A \rangle) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, wie wir mittels der nun zu behandelnden „Mayer-Vietoris-Sequenz" noch zeigen werden.

Theorem 4.1

Sei X ein beliebiger topologischer Raum und X_1, X_2 zwei offene Teilräume mit $X = X_1 \cup X_2$. Dann gibt es zu dieser Überdeckung von X die folgende (exakte) „Mayer-Vietoris-Sequenz":

$$\begin{tikzcd} H_n(X_1 \cap X_2) \arrow[r, "\mu"] & H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \arrow[r, "\nu"] & H_n(X) \arrow[dll, "\Delta"'] \\ H_{n-1}(X_1 \cap X_2) \arrow[r, "\mu"] & H_{n-1}(X_1) \oplus H_{n-1}(X_2) \arrow[r, "\nu"] & H_{n-1}(X) \end{tikzcd}$$

wobei für ein $[c] \equiv \{c + \partial_{n+1}(S_{n+1}(X_1 \cap X_2))\}$ aus $H_n(X_1 \cap X_2)$ der Homom. μ durch

$$\mu([c]) := \left(\{c + \partial_{n+1}(S_{n+1}(X_1))\}, -\{c + \partial_{n+1}(S_{n+1}(X_2))\}\right)$$

für $([c_1],[c_2]) \in H_n(X_1) \oplus H_n(X_2)$ der Homom. ν durch $\nu([c_1],[c_2]) := \{(c_1 + c_2) + \partial_{n+1}(S_{n+1}(X))\}$

und der Verbindungshomom. Δ mittels des baryzentrischen Unterteil. oper. $B_{\cdot}^{X}$ definiert wird:

Ist $[z] \in H_n(X)$, so exist. ein $r \geq 1$, sodaß $(B_n^X)^r(z) = x_1 + x_2$ für $x_j \in S_n(X_j)$, $j = 1, 2$, und wir setzen $\Delta([z]) := \{\partial_n(x_1) + \partial_n(S_n(X_1 \cap X_2))\}$.

<u>Beweis</u>:

Zunächst beachte man, daß aus $\partial_n z = 0$ folgt: $0 = (B_{n-1}^X)^r \circ \partial_n(z) = \partial_n \circ (B_n^X)^r(z)$

$$= \partial_n(x_1) + \partial_n(x_2).$$

$$\Rightarrow \Delta([z]) := \{\partial_n(x_1) + \partial_n(S_n(X_1 \cap X_2))\}$$

$$= -\{\partial_n(x_2) + \partial_n(S_n(X_1 \cap X_2))\}$$

und tatsächlich muß $\partial_n(x_1) = -\partial_n(x_2)$ sowohl in $S_{n-1}(X_1)$ als auch in $S_{n-1}(X_2)$, also in $S_{n-1}(X_1 \cap X_2)$ liegen!

Desweiteren induziert die Inklusion der Summe $(S_n(X_1)+S_n(X_2), \partial_n)$ in $(S_n(X), \partial_n)$ einen Isomorphismus in der Homologie, denn sei eine n-Kette $z \in S_n(X)$ gegeben, so exist. ein $r \geq 1$ mit $(B_n^X)^r(z) = x_1 + x_2$, wie oben für $x_j \in S_n(X_j)$, $j = 1, 2$.

$\Rightarrow [z] = [(B_n^X)^r(z)] = [x_1 + x_2]$, sodaß

$$i_* : H_n(S.(X_1) + S.(X_2), \partial.) \to H_n(X)$$

surjektiv ist. Gelte nun $i_*([x_1 + x_2]) = 0$, so hieße dies, daß es eine $(n+1)$-Kette $c \in S_{n+1}(X)$ mit $x_1 + x_2 = \partial_{n+1}(c)$ gibt.

Zu c exist. wieder ein $r \geq 1$, sodaß $(B_{n+1}^X)^r(c) = c_1 + c_2$ für $c_i \in S_{n+1}(X_i)$

gilt. Wir erhalten also:

$$\left(B_n^{\times}\right)^r(x_1+x_2)=\left(B_n^{\times}\right)^r\circ\partial_{n+1}(c) \qquad (*)$$

$$=\partial_{n+1}\circ\left(B_{n+1}^{\times}\right)^r(c)=\partial_{n+1}(c_1+c_2)$$

Nach Proposition 3.11 (b) gilt $\left[\left(B_n^{\times}\right)^r(x_i)\right]=[x_i]$ in $H_n(X_i)$, also daß es $(n+1)$-Ketten $y_i\in S_{n+1}(X_i)$ mit $x_i=\left(B_n^{\times}\right)^r(x_i)+\partial_{n+1}(y_i)$ gibt. Zusammen mit $(*)$ folgt also:

$$x_1+x_2=\left(B_n^{\times}\right)^r(x_1+x_2)+\partial_{n+1}(y_1+y_2)$$

$$=\partial_{n+1}\big((c_1+y_1)+(c_2+y_2)\big),$$ sodaß

also $[x_1+x_2]=0$ in $H_n(S.(X_1)+S.(X_2),\partial.)$ gilt. Also ist i_* auch injektiv!

Aus Aufgabe 5 folgt nun, daß die angegebene Sequenz in der Tat exakt ist. $\square$

Beispiel

a) Nehmen wir nun zu wissen an, daß die S^3 als Vereinigung $S^3 \cong VT_1 \cup VT_2$ zweier Volltori dargestellt werden kann, sodaß gerade $VT_1 \cap VT_2 \cong S^1 \times S^1$ gilt.

Wenden wir nun die Mayer-Vietoris-Seq. auf $X := S^3$, $X_i := VT_i$ und $X_1 \cap X_2 = S^1 \times S^1$ an, zusammen mit dem Wissen $VT_i \simeq S^1$

$$\Rightarrow \quad 0 = H_3(VT_1) \oplus H_3(VT_2) \rightarrowtail \overset{\mathbb{Z} \cong}{H_3(S^3)}$$

$$\xrightarrow{\Delta_3} H_2(S^1 \times S^1) \xrightarrow{\mu_2} \overset{0 =}{H_2(VT_1)} \oplus \overset{0 =}{H_2(VT_2)} \xrightarrow{\nu_2} \overset{0 =}{H_2(S^3)}$$

$$\xrightarrow{\Delta_2} H_1(S^1 \times S^1) \xrightarrow[\cong]{\mu_1} \underset{\cong \mathbb{Z}}{H_1(VT_1)} \oplus \underset{\cong \mathbb{Z}}{H_1(VT_2)} \to 0$$

$$\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

Da Δ_3 injektiv sein muß und μ_2 die 0-Abbild. ist $\Rightarrow H_2(S^1 \times S^1) = \mathrm{Kern}(\mu_2) = \mathrm{Bild}(\Delta_3) \cong H_3(S^3) \cong \mathbb{Z}$

Und da $H_2(S^3) = 0 = H_1(S^3)$ und somit μ_1 ein Isomorph. ist

$$\Rightarrow H_1(S^1 \times S^1) \underset{\mu_1}{\cong} H_1(VT_1) \oplus H_1(VT_2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$$

b) Zu einem beliebigen topologischen Raum X betrachte man seine beiden „Kegel" $C_+(X) := X \times [0,1] / X \times \{1\}$ und $C_-(X) := X \times [-1,0] / X \times \{-1\}$ und die Einhängung $E(X) := C_+(X) \cup C_-(X) \equiv X \times [-1,1] / X \times \{-1,1\}$.

Offenbar sind $C_+(X)$ und $C_-(X)$ in ihre Kegelspitzen hinein zusammenziehbar, und es gilt $C_+(X) \cap C_-(X) = X \times \{0\} \cong X$.

Durch Zuhilfenahme der beiden offenen Umgebungen $C_+^{\varepsilon}(X) := X \times [-\varepsilon, 1] / X \times \{1\}$ und

$(\varepsilon > 0)$ $\quad C_-^{\varepsilon}(X) := X \times [-1, \varepsilon] / X \times \{-1\}$ von $C_+(X)$ und

$C_-(X)$ in $E(X)$ erhalten wir wegen

$EX = C_+^\varepsilon(X) \cup C_-^\varepsilon(X)$ und $C_\pm^\varepsilon(X) \simeq C_\pm(X)$

aus der Mayer-Vietoris-Sequenz:

$$\begin{array}{l} \underset{\begin{array}{c} H_n(X) \\ \cong \end{array}}{} \\ H_n(X\times[-\varepsilon,\varepsilon]) \xrightarrow{\mu} \overbrace{H_n(C_+^\varepsilon(X)) \oplus H_n(C_-^\varepsilon(X))}^{=0} \xrightarrow{\nu} H_n(EX) \\ \xrightarrow{\Delta_n} H_{n-1}(X) \xrightarrow{\mu} \underbrace{H_{n-1}(C_+^\varepsilon(X))}_{=0} \oplus \underbrace{H_{n-1}(C_-^\varepsilon(X))}_{=0} \xrightarrow{\nu} H_{n-1}(EX) \end{array}$$

$$\Longrightarrow \Delta_n : H_n(EX) \xrightarrow{\cong} H_{n-1}(X),\ \forall n \geq 2.$$

Wenden wir dies speziell auf $X := \mathbb{S}^{n-1}$

an und bemerken wir, daß gerade

$E(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{S}^n$ wegen $C_\pm(\mathbb{S}^{n-1}) \cong \mathbb{D}^n$ gilt

$$\Longrightarrow H_n(\mathbb{S}^n) \underset{\Delta_n}{\cong} H_{n-1}(\mathbb{S}^{n-1}),\ \forall n \geq 2.$$

Weiß man also, daß $H_1(\mathbb{S}^1) \cong \mathbb{Z}$ mit Erzeuger

$[\sigma(te^1 + (1-t)e^0) := e^{2\pi i t}]$ ist, so erhält man aus dem obigen „Einhängungs-Isomorphismus":

$H_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ mit Erzeuger

$[S^n] := \Delta_n^{-1} \circ \Delta_{n-1}^{-1} \circ \cdots \circ \Delta_2^{-1}([\sigma])$! $\forall n \geq 2.$